ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 1/2/2013

1. Dato il piano
$$\pi : \alpha x - y + \beta z - 1 = 0 \tag{1}$$
e la retta
$$r : \begin{cases} x - \beta z - 2 = 0, \\ 3x + y = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$
determinare quando, al variare di α e β,
a) la retta ed il piano sono incidenti,
b) la retta è parallela al piano,
c) la retta appartiene al piano,
d) la retta ed il piano sono perpendicolari.
e) Nel caso in cui la retta ed il piano siano incidenti, determinare il punto di intersezione tra la retta ed il piano usando la regola di Cramer.

2. Si consideri l'applicazione $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$, definita da
$$[T(p)](t) = p'(t) - p''(t) - 2p(t), \tag{3}$$
dove p' e p'' indicano rispettivamente la derivata prima e la derivata seconda di p.
a) Dimostrare che l'applicazione T è lineare.
b) Costruire la matrice associata a T rispetto alla base
$$\mathcal{B} = \left\{ p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2, p_3(t) = t^3 \right\}. \tag{4}$$
c) T è iniettiva? È suriettiva? È invertibile?
d) Dimostrare che
$$U = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] \,|\, p(0) = p(1) = 0\} \tag{5}$$
è un sottospazio e trovarne una base.
e) Dato il sottospazio
$$W = \mathrm{Span}(w_1(t) = 1 - t, w_2(t) = 1 - t^2, w_3(t) = 1 - t^3), \tag{6}$$
trovare una base per $U + W$ e $U \cap W$.
f) Vale $\mathbb{R}_3[t] = U + W$? E $\mathbb{R}_3[t] = U \oplus W$?
g) Trovare autovalori ed autospazi di T. T è diagonalizzabile?

3. Sia data l'applicazione $g : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definita da
$$g(A, B) = \mathrm{tr}(AB). \tag{7}$$
a) Dimostrare che g è un prodotto scalare.
b) Scrivere la matrice associata a tale prodotto scalare rispetto alla base
$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{8}$$
c) Calcolare l'indice di positività e l'indice di nullità del prodotto scalare g. Tale

prodotto scalare è definito positivo? È non degenere?
d) Dimostrare che

$$W = \left\{ X \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid AX = XA,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \tag{9}$$

è un sottospazio e trovarne una base.

e) Determinare una base del complemento ortogonale $W^\perp$ (rispetto al prodotto scalare g) di W.

f) Determinare se $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = W + W^\perp$ e se $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = W \oplus W^\perp$.

g) Come variano gli indici di positività e nullità se al posto del prodotto scalare sopra definito si considera il prodotto scalare $\tilde{g}(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$, sempre con $A, B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

h) (Facoltativo) Generalizzare il calcolo degli indici di positività e nullità per g e $\tilde{g}$ a $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 1/2/2013

1. a) La retta e il piano sono incidenti quando il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \alpha x - y + \beta z = 1, \\ x - \beta z = 2, \\ 3x + y = 0, \end{cases} \tag{10}$$

ammette una sola soluzione, vale a dire quando il rango di entrambe le matrici

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \beta \\ 1 & 0 & -\beta \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^\star = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \beta & 1 \\ 1 & 0 & -\beta & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

è uguale a 3. Questo accade quando $\det(A) = \beta(\alpha + 4) \neq 0$, vale a dire per $\alpha \neq -4, \beta \neq 0$.

b) La retta è parallela al piano quando $\mathrm{rg}(A) = 2$, vale a dire per $\alpha = -4$ oppure per $\beta = 0$.

c) La retta appartiene al piano quando $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 2$. Per $\alpha = -4$, $\mathrm{rg}(A) = 2 < \mathrm{rg}(A^\star) = 3$, mentre per $\beta = 0$, $\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{rg}(A^\star)$ se $\alpha = -\frac{5}{2}$ (per gli altri valori di α si ha $\mathrm{rg}(A) = 2 < \mathrm{rg}(A^\star) = 3$). Quindi solo per $\alpha = -\frac{5}{2}, \beta = 0$ la retta appartiene al piano.

d) Possiamo scrivere la retta r (per $\beta \neq 0$) nella forma

$$\frac{x-2}{\beta} = \frac{y+6}{-3\beta} = z, \tag{12}$$

e quindi la sua direzione è quella del vettore $(\beta, -3\beta, 1)$ (anche per $\beta = 0$, caso in cui la retta è diretta come l'asse z). Possiamo poi scrivere il piano nella forma parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \alpha u + \beta v - 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} v, \tag{13}$$

con $u, v \in \mathbb{R}$. Quindi $(1, \alpha, 0)$ e $(0, \beta, 1)$ sono i vettori di giacitura del piano. Imponendo la perpendicolarità di questi due vettori al vettore $(\beta, -3\beta, 1)$ otteniamo il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} \beta - 3\alpha\beta = 0, \\ -3\beta^2 + 1 = 0, \end{cases} \tag{14}$$

che ha come soluzioni $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.

e) Usando la regola di Cramer otteniamo, per $\alpha \neq -4$ e $\beta \neq 0$,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & \beta \\ 2 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{3}{\alpha + 4},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \beta \\ 1 & 2 & -\beta \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{9}{\alpha+4},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{2\alpha+5}{\beta(\alpha+4)}. \tag{15}$$

2. a)

$$\begin{aligned}[T(\alpha p+\beta q)](t) &= (\alpha p+\beta q)'(t) - (\alpha p+\beta q)''(t) - 2(\alpha p+\beta q)(t) \\ &= \alpha p'(t) + \beta q'(t) - [\alpha p''(t) + \beta q''(t)] - 2[\alpha p(t) + \beta q(t)] \\ &= \alpha[T(p)](t) + \beta[T(q)](t). \end{aligned} \tag{16}$$

b)

$$T(p_0) = -2p_0, \tag{17}$$
$$T(p_1) = p_0 - 2p_1, \tag{18}$$
$$T(p_2) = -2p_0 + 2p_1 - 2p_2, \tag{19}$$
$$T(p_3) = -6p_1 + 3p_2 - 2p_3. \tag{20}$$

La matrice associata a T rispetto alla base assegnata è quindi data da

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

c) $\det(M) = 16 \neq 0$. Quindi T è invertibile e, in particolare, anche iniettiva e suriettiva.

d) U è un sottospazio in quanto, dati $p, q \in U$, vale a dire $p(0) = p(1) = 0$ e $q(0) = q(1) = 0$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$(\alpha p + \beta q)(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = 0 \tag{22}$$

e analogamente $(\alpha p + \beta q)(1) = 0$, per cui anche $\alpha p + \beta q \in U$.

Consideriamo un generico polinomio in $\mathbb{R}_3[t]$, $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$. Imponendo $p(0) = p(1) = 0$ otteniamo le condizioni $a = 0$ e $d = -(b + c)$. Quindi $\dim(U) = 2$ e una base di U è data da

$$\mathcal{B}_U = \{u_1(t) = t - t^3,\ u_2(t) = t^2 - t^3\}. \tag{23}$$

e) Per trovare una base di $U + W$ scriviamo i vettori colonna dati dalle coordinate di w_1, w_2, w_3, u_1, u_2 (rispetto alla base $\mathcal{B}$) in una matrice e riduciamola a scala:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Quindi $\dim(U+W) = 3$ e $\mathcal{B}_{U+W} = \{w_1, w_2, w_3\}$. In particolare concludiamo anche che w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti e quindi $\dim(W) = 3$. Usando il teorema di Grassmann ricaviamo

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 2. \tag{25}$$

Siccome $u_1 = w_3 - w_1$ e $u_2 = w_3 - w_2$, abbiamo che $\mathcal{B}_{U \cap W} = \{u_1, u_2\}$.

f) Non vale $\mathbb{R}_3[t] = U + W$ (e quindi neppure $\mathbb{R}_3[t] = U \oplus W$) in quanto $\dim(U + W) = 3 < \dim(\mathbb{R}_3[t]) = 4$.

g) Il polinomio caratteristico $p_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = (\lambda + 2)^4$ ha come unica radice $\lambda_1 = -2$. La molteplicità algebrica di questo autovalore vale $\mu_1 = 4$. Il corrispondente autospazio ha come base $\mathcal{B}_1 = \{p_0(t) = 1\}$. Quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore λ_1 vale $\nu_1 = 1 < \mu_1$ e questo ci permette di concludere che T non è diagonalizzabile.

3. a) i)

$$g(B, A) = \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB) = g(A, B), \tag{26}$$

dove la seconda uguaglianza deriva dall'invarianza della traccia per permutazioni cicliche.

ii)

$$g(A, B+C) = \mathrm{tr}[A(B+C)] = \mathrm{tr}(AB+AC) = \mathrm{tr}(AB)+\mathrm{tr}(AC) = g(A, B)+g(A, C). \tag{27}$$

iii)

$$g(A, kB) = \mathrm{tr}[A(kB)] = \mathrm{tr}[k(AB)] = k\mathrm{tr}(AB) = kg(A, B). \tag{28}$$

b) Gli elementi c_{ij} della matrice C associata al prodotto scalare rispetto alla base $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ sono per definizione dati da $c_{ij} = g(E_i, E_j)$. Otteniamo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

c) Diagonalizzando la matrice C otteniamo gli autovalori $\lambda_1 = 1 > 0$, con molteplicità uguale a 3 e $\lambda_2 = -1 < 0$, con molteplicità uguale ad uno. Concludiamo quindi che l'indice di positività del prodotto scalare vale tre, quello di nullità zero. Di conseguenza il prodotto scalare è non definito positivo e non degenere.

d) Dati generici $X_1, X_2 \in W$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$A(\alpha X_1 + \beta X_2) - (\alpha X_1 + \beta X_2)A = \alpha(AX_1 - X_1A) + \beta(AX_2 - X_2A) = 0. \tag{30}$$

Quindi anche $\alpha X_1 + \beta X_2 \in A$ e questo implica che W sia un sottospazio. Data una generica matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la condizione che M appartenga a W, vale a dire $AM = MA$, ci porta al sistema

$$\begin{cases} a + 2c = a, \\ b + 2d = 2a - b, \\ -c = c, \\ -d = 2c - d, \end{cases} \tag{31}$$

che ha come soluzione $c = 0$, $d = a - b$. Quindi W ha dimensione 2 e una base di W è data da

$$\mathcal{B}_W = \left\{ W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{32}$$

e) Imponendo l'ortogonalità di una generica matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ rispetto a W_1 e W_2 otteniamo

$$\begin{cases} g(M, W_1) = a + d = 0, \\ g(M, W_2) = c - d = 0, \end{cases} \tag{33}$$

da cui $d = -a$, $c = -a$. Quindi $W^\perp$ ha dimensione due ed una sua base è data da

$$\mathcal{B}_{W^\perp} = \left\{ U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{34}$$

f) Abbiamo $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = W \oplus W^\perp$ (e quindi anche $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = W + W^\perp$) in quanto la matrice che ha come colonne le coordinate di W_1, W_2, U_1, U_2 rispetto alla base $\mathcal{B}$ ha rango 4, vale a dire rango uguale alla somma delle dimensioni di W e $W^\perp$ e alla dimensione di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

g) In questo caso, data una generica matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\tilde{g}(A, A) = \operatorname{tr}({}^t AA) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{35}$$

Siccome $\tilde{g}(A, A) > 0$ se $A \neq 0$, ne risulta che $\tilde{g}$ è definito positivo. Quindi l'indice di positività di $\tilde{g}$ vale 4 e il suo indicie di nullità 0.

h) Scegliendo come base per costruire la matrice C associata al prodotto scalare quella canonica, $\{E_{ij}\}_{i,j=1,\ldots n}$, con E_{ij} matrice che ha solo l'elemento ij uguale and 1 e tutti gli altri nulli, otteniamo

$$g(E_{ii}, E_{ii}) = 1, \quad g(E_{ij}, E_{ji}) = 1, \tag{36}$$

mentre tutti gli altri elementi di matrice di g sono uguali a 0. Quindi, ordinando opportunamente gli elementi della base, C può essere scritta come matrice a blocchi, con n elementi diagonali uguali ad 1 (quelli corrispondenti a $g(E_{ii}, E_{ii})$, con $i = 1, ..., n$) e $n(n-1)/2$ blocchi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Ognuno di questi blocchi ha come autovalori 1 e -1. Quindi che C ha come autovalori 1, con molteplicità algebrica $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ (numero di blocchi più numero di elementi diagonali uguali ad 1) e -1, con molteplicità algebrica $\frac{n(n-1)}{2}$. Concludiamo che C ha come indice di positività $\frac{n(n+1)}{2}$ e come indice di nullità 0.

Nel caso di $\tilde{g}$, data una generica matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$,

$$\tilde{g}(A, A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2, \tag{38}$$

e quindi $\tilde{g}(A, A) > 0$ per ogni $A \neq 0$. Ne consegue che $\tilde{g}$ è definito positivo, per cui l'indice di positività vale n^2 e l'indice di nullità 0.