ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 2/2/2004

1. Si consideri la matrice reale
$$A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & k \end{pmatrix}, \qquad (1)$$
con $k \in \mathbf{R}$. Tale matrice opera sullo spazio $\mathbf{R}^2$, nel quale è definito l'ordinario prodotto scalare $\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ generici vettori in $\mathbf{R}^2$. Determinare:
(a) per quali valori del parametro k la matrice è invertibile e in tal caso calcolare la matrice inversa;
(b) per quali valori di k la matrice ammette autovalori ed autovettori in $\mathbf{R}^2$;
(c) per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile;
(d) per quali valori di k gli autovettori sono mutuamente ortogonali.

2. Sia data in $\mathbf{C}^3$ l'applicazione lineare definita da
$$\begin{cases} f(e_1) = ie_2, \\ f(e_2) = ie_1 + ie_3, \\ f(e_3) = ie_2, \end{cases} \qquad (2)$$
dove $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è una base di $\mathbf{C}^3$.
(a) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(b) Trovare autovalori ed autovettori dell'applicazione lineare.
(c) Trovare una base per il nucleo e una base per l'immagine di f.

3. (a) Enunciare e discutere il teorema di Sylvester.
(b) Calcolare indice di positività e di nullità della matrice
$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$
al variare di $a \in \mathbf{R}$.

4. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi sul corpo $\mathbf{R}$, di grado minore od uguale a 3. Sia, per ogni $f \in V$,

$$f(t) = (t-1)q(t) + k, \tag{4}$$

con $k \in \mathbf{R}$, e si consideri l'applicazione $L : V \to V$, definita da

$$L(f) = q. \tag{5}$$

(a) Dimostrare che L è lineare.
(b) Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di L.
(c) Calcolare autovalori ed autovettori di L.
(d) Dire se L è diagonalizzabile.

5. Sia φ l'applicazione da $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ (cioé, dallo spazio delle matrici reali 2×2) in sé, definita da

$$\varphi(A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA). \tag{6}$$

(a) Dimostrare che φ è lineare.
(b) Trovare gli autovalori ed autovettori di φ.
(c) Generalizzare al caso in cui φ operi su matrici $n \times n$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 2/2/2004

1. (a) La matrice è invertibile quando

$$\det(A) = 2k^2 - 1 \neq 0, \tag{7}$$

cioé per $k \neq \pm 1/\sqrt{2}$. In tal caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{2k^2-1} \begin{pmatrix} k & -1-k \\ -1+k & k \end{pmatrix}. \tag{8}$$

(b) Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - k & -1-k \\ -1+k & \lambda - k \end{pmatrix} = (\lambda-k)^2 + (k-1)(k+1). \tag{9}$$

La condizione $p_A(\lambda) = 0$ è soddisfatta per

$$\lambda_\pm = k \pm \sqrt{1-k^2}. \tag{10}$$

Tali autovalori sono reali per $-1 \leq k \leq 1$. Per $-1 < k < 1$ gli autovalori sono distinti e i corrispondenti autovettori, sciegliendo la prima componente uguale ad 1, sono dati da

$$X_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Tali autovettori appartengono ad $\mathbf{R}^2$.
Per $k = 1$ l'unico autovalore è $\lambda = 1$, e una base per il corrispondente autospazio V_1 è data dall'autovettore $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Analogamente, per $k = -1$ l'unico autovalore è $\lambda = -1$, e una base per il corrispondente autospazio V_{-1} è data dall'autovettore $X_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(c) La matrice è diagonalizzabile per $-1 < k < 1$, poiché $\{X_+, X_-\}$ è una base di autovettori per $\mathbf{R}^2$. La matrice non è diagonalizzabile per $k = \pm 1$, poiché $\dim(V_1) = 1$ e $\dim(V_{-1}) = 1$, mentre $\dim(\mathbf{R}^2) = 2$.
(d) Il prodotto scalare dei due autovettori X_+ e X_- vale

$$\langle X_+, X_- \rangle = 1 - \frac{1-k^2}{1+k} \tag{12}$$

ed è nullo (nell'intervallo $-1 < k < 1$) quando $k = 0$. La base $\{X_+, X_-\}$ è allora ortogonale solamente per $k = 0$.

2. (a) La matrice M associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è data da

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

(b) Il polinomio caratteristico di M è

$$p_M(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + 2), \tag{14}$$

che ha come radici (autovalori di M)

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_+ = i\sqrt{2}, \quad \lambda_- = -i\sqrt{2}, \tag{15}$$

con corrispondenti autovettori

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

(c) $\{X_0\}$ è una base per $\mathrm{Ker}(f)$, mentre $\{X_+, X_-\}$ costituisce una base per $\mathrm{Im}(f)$.

3. (b) Grazie al teorema di Sylvester, possiamo calcolare l'indice di positività e di nullità servendoci di una qualsiasi base ortogonale. Il teorema spettrale ci dice poi che la matrice simmetrica B possiede una base ortogonale costituita da autovettori di B. Conviene quindi riferirsi a tale base per calcolare gli indici di positività e di nullità. Chiamiamo g_B l'applicazione bilineare associata alla matrice B, cioé $g_B(X, Y) = {}^tXBY$, con X e Y vettori colonna in R^3. Se X_i è un autovettore (normalizzato) di B corrispondente all'autovalore λ_i ($AX_i = \lambda_i X_i$), abbiamo $g_B(X_i, X_i) = \lambda_i$. Quindi, per calcolare gli indici di positività e di nullità di B, basta contare gli autovalori di B positivi (moltiplicati per la loro molteplicità) e la degenerazione dell'autovalore nullo (se esiste). Il polinomio caratteristico associato alla matrice B è dato da

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - a^2), \tag{17}$$

che ha radici (autovalori di B)

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = a, \quad \lambda_3 = -a. \tag{18}$$

Quindi, per $a \neq 0$ l'indice di nullità vale 0 e l'indice di positività vale 2, mentre per $a = 0$ l'indice di nullità vale 2 e l'indice di positività 1.

4. (a) Dati due polinomi $f_1, f_2 \in V$, con $f_1(t) = (t-1)q_1(t) + k_1$, $f_2(t) = (t-1)q_2(t) + k_2$, abbiamo

$$L(f_1+f_2) = L[(t-1)(q_1+q_2)+k_1+k_2] = q_1+q_2 = L(f_1)+L(f_2); \tag{19}$$

inoltre, per ogni $f \in V$, con $f(t) = (t-1)q(t) + k$, e per ogni $c \in \mathbf{R}$, abbiamo

$$L(cf) = L[(t-1)(cf) + ck] = cq = cL(f). \tag{20}$$

(b) Conviene costruire la matrice A associata all'applicazione lineare rispetto alla base $\mathcal{B} = \{t^3, t^2, t, 1\}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} L(t^3) &= L[(t-1)(t^2+t+1)+1] = t^2+t+1, \\ L(t^2) &= L[(t-1)(t+1)+1] = t+1, \\ L(t) &= L[(t-1)1+1] = 1, \\ L(1) &= L[(t-1)0+1] = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

da cui otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Questa matrice ha rango 3, per cui $\dim[\mathrm{Ker}(L)] = 1$ e $\dim[\mathrm{Im}(L)] = 3$.
(c) Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^4, \tag{23}$$

che ha come unica radice (autovalore di A) $\lambda = 0$ (che è un autovalore quattro volte degenere). La condizione $AX = \lambda X = 0$ ci consente di trovare una base per l'autospazio V_0 associato all'autovalore $\lambda = 0$. Ponendo ${}^tX = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

da cui

$$V_0 = \{a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{R}\}. \tag{25}$$

(d) Poiché $\dim(V_0) = 1 < \dim(R^4) = 4$, L non è diagonalizzabile.

5. (a) Prese due matrici reali 2×2 A e B, abbiamo

$$\varphi(A+B) = \frac{1}{2}[A+B+{}^t(A+B)] = \frac{1}{2}(A+{}^tA)+\frac{1}{2}(B+{}^tB) = \varphi(A)+\varphi(B); \tag{26}$$

inoltre, per ogni $c \in \mathbf{R}$,

$$\varphi(cA) = \frac{1}{2}[cA + {}^t(cA)] = c\frac{1}{2}(A + {}^tA) = c\varphi(A). \tag{27}$$

(b) Per ogni matrice A simmetrica,

$$\varphi(A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA) = A, \tag{28}$$

per cui tutte le matrici simmetrice sono autovettori di φ con autovalore 1. Tali matrici costituiscono un sottospazio di dimensione 3 in $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, con come base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{29}$$

Se invece A è antisimmetrica, abbiamo

$$\varphi(A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA) = \frac{1}{2}(A - A) = 0. \tag{30}$$

Quindi le matrici antisimmetriche sono autovettori di φ con autovalore 0. Tali matrici costituiscono un sottospazio di dimensione 1 in $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, con come base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{31}$$

Come soluzione alternativa del punto (b) di questo esercizio, si può costruire la matrice 4×4 associata a φ rispetto ad una base di $\mathcal{B}_{2,2}(\mathbf{R})$

e diagonalizzare tale matrice.
(c) Le matrici simmetriche ed antisimmetriche sono ancora autovettori di φ, corrispondenti rispettivamente agli autovalori 1 e 0. Se chiamiamo V_1 l'autospazio costituito dalle matrici simmetriche e V_0 quello costituito dalle matrici antisimmetriche, abbiamo $\dim(V_1) = n(n+1)/2$, $\dim(V_0) = n(n-1)/2$ e $\mathcal{B}_{n,n}(\mathbf{R}) = V_0 \oplus V_1$, per cui gli unici autovalori di φ sono 0 ed 1.