ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 2/2/2007

1. Si consideri in $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbf{R})$ la matrice definita da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   a) Calcolare gli autovalori di A ed una base per ogni autospazio.
   b) La matrice è diagonalizzabile? In caso affermativo, trovare una trasformazione di similitudine che riduca A in forma diagonale.
   c) Calcolare A^n, con $n \in \mathbf{N}$.

2. Calcolare il determinante della matrice $n \times n$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n & n \\ . & . & \dots & . & . & . & . \\ . & . & \dots & . & . & . & . \\ . & . & \dots & . & . & . & . \\ n-1 & n & \dots & n & n & n & n \\ n & n & \dots & n & n & n & n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

3. a) Enunciare e discutere il teorema di Sylvester.
   b) Calcolare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, indice di positività e di nullità della forma bilineare simmetrica rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ k^2 & 0 & k^3 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

4. Sia data in $\mathbf{C}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$\begin{cases} L(e_1) = ie_2 + e_3, \\ L(e_2) = -ie_1 + 2e_2, \\ L(e_3) = e_1 + 2e_3, \end{cases} \tag{4}$$

   dove $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è una base di $\mathbf{C}^3$.
   a) Scrivere la matrice M associata ad L rispetto alla base $\mathcal{B}$.

b) Trovare una base per il nucleo e una base per l'immagine di L.
c) Qual'è la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare $M^2X = 4X$, con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^3$?

5. Dire se la funzione $\nu : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$\nu(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_2|) \tag{5}$$

per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ è una norma, cioé se soddisfa alle proprietà della norma di un vettore.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 2/2/2007

1. a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 5). \tag{6}$$

Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = 2$ (con molteplicità algebrica 2) e $\lambda_2 = 5$ (con molteplicità algebrica 1). I corrispondenti autospazi sono

$$V_1 = \left\{ a \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbf{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbf{R} \right\}. \tag{7}$$

b) Siccome per tutti gli autovalori la molteplicità algebrica è uguale a quella geometrica, ne consegue che la matrice è diagonalizzabile. La trasformazione di similitudine richiesta è $A' = N^{-1}AN$, dove

$$A' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \mathrm{diag}(2, 2, 5), \tag{8}$$

N è la matrice che ha come colonne gli autovettori di A e N^{-1} la sua inversa:

$$N = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & -3 & 1/3 \\ 1/3 & 3 & 2/3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

c) Abbiamo $A = NA'N^{-1}$, da cui possiamo calcolare A^n moltiplicando solamente 3 matrici:

$$A^n = N(A')^n N^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & -3 & 1/3 \\ 1/3 & 3 & 2/3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

2. Sottraendo all'ultima colonna la penultima, alla penultima la terz'ultima

e così via otteniamo

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & ... & 1 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & ... & . & . & . & . \\ . & . & ... & . & . & . & . \\ . & . & ... & . & . & . & . \\ n-1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{n_t} n, \tag{11}$$

dove $n_t = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = n(n-1)/2$ è il numero di trasposizioni per ridurre la matrice alla forma triangolare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 1 & ... & 1 & 2 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 3 \\ . & . & ... & . & . \\ . & . & ... & . & . \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & n \end{pmatrix}. \tag{12}$$

3. b) È sufficiente studiare i segni degli autovalori di A in quanto il teorema spettrale ci assicura che è possibile trovare una base ortonormale di autovettori $\{v_i\}$ di A e $\langle v_i, Av_i \rangle = \lambda_i$, con λ_i autovalore di A corrispondente all'autovettore v_i. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = \lambda[\lambda^2 - (k^3+1)\lambda + k^3 - k^4], \tag{13}$$

per cui gli autovalori di A sono dati da

$$\lambda_1 = k, \quad \lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(k^3 + 1 \pm \sqrt{(k^3+1)^2 - 4k^3(1-k)}\right). \tag{14}$$

Quando $-4k^3(1-k) < 0$, cioé per $0 < k < 1$, i due autovalori hanno lo stesso segno, che è uguale al segno di k^3+1, per cui $\lambda_+, \lambda_- > 0$ in questo caso. Siccome anche $\lambda_1 > 0$, ne concludiamo che per $0 < k < 1$ l'idice di positività vale 3 e quello di nullità 0.

Per $k < 0$ e per $k > 1$ i due autovalori $\lambda_\pm$ hanno segno discorde, $\lambda_+ > 0$ e $\lambda_- < 0$. Siccome per $k < 0$ abbiamo $\lambda_1 < 0$ mentre per $k > 1$ è $\lambda_1 > 0$, ne consegue che per $k < 0$ l'indice di positività vale 1 e quello di nullità 0, mentre per $k > 1$ l'indice di positività è 2 e quello di nullità 0.

Per $k = 0$ abbiamo $\lambda_1 = 0$, $\lambda_+ = 1$, $\lambda_- = 0$, per cui l'indice di positività vale 1 e quello di nullità 2.

Per $k = 1$ abbiamo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_+ = 2$, $\lambda_- = 0$, per cui l'indice di positività vale 2 e quello di nullità 1.

Soluzione alternativa: applicare Gram-Schmidt alla base canonica di $\mathbf{R}^3$, cioé a $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$. Si ricava così la base ortogonale $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$, con

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1, \\ v_2 &= e_2 - \frac{\langle e_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = e_2, \\ v_3 &= e_3 - \frac{\langle e_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle e_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = e_3 - k^2 e_1, \end{aligned} \tag{15}$$

con il prodotto scalare definito da $\langle v, w\rangle = {}^t vAW$ per ogni v, w in $\mathbf{R}^3$. Basta infine calcolare

$$\langle v_1, v_1\rangle = 1, \quad \langle v_2, v_2\rangle = k, \quad \langle v_3, v_3\rangle = -k^4 + k^3 \tag{16}$$

e studiare il segno di $\langle v_i, v_i\rangle$ per $i = 1, 2, 3$ per ritrovare gli stessi risultati ottenuti con il metodo precedentemente usato.

4. a) La matrice M associata ad L rispetto alla base $\mathcal{B}$ è data da

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

b) Siccome det(M) $= -4 \neq 0$, M è invertibile, per cui dim(Ker(L)) $= 0$ e dim(Im(L)) $= 3$. Quindi Ker(L) contiene solo il vettore nullo mentre una base per Im(L) è ad esempio costituita dalle 3 colonne di L.
c) Siccome M ha autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_\pm = 1 \pm \sqrt{3}$, ne consegue che

M^2 ha come autovalori $\lambda_1^2 = 4$, $\lambda_+^2 = 4 + 2\sqrt{3}$ e $\lambda_-^2 = 4 - 2\sqrt{3}$. Tali autovalori hanno tutti molteplicità algebrica uguale ad uno e quindi anche le corrispondenti molteplicità geometriche devono esere uguali ad uno. Ne consegue che $M^2X = 4X = \lambda_1^2 X$ ha come soluzione un sottospazio (autospazio corrispondente all'autovalore λ_1^2) di dimensione 1.

5. La funzione ν è effettivamente una norma in quanto soddisfa alle 3 proprietà di una norma:

   (i) Risulta $\nu(x_1, x_2) \geq 0$ per ogni (x_1, x_2) in $\mathbf{R}^2$; inoltre l'uguaglianza sussiste se e solo se $x_1 = x_2 = 0$.

   (ii) Per ogni $c \in \mathbf{R}$ e $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $\nu(c(x_1, x_2)) = \nu(cx_1, cx_2) = \max(|cx_1|, |cx_2|) = \max(|c||x_1|, |c||x_2|) = |c| \max(|x_1|, |x_2|) = |c|\nu(x_1, x_2)$.

   (iii) Per ogni $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$ in $\mathbf{R}^2$ abbiamo $\nu(X + Y) = \nu(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \max(|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|) \leq \max(|x_1| + |y_1|, |x_2| + |y_2|) \leq \max\{|x_1| + \max(|y_1|, |y_2|), |x_2| + \max(|y_1|, |y_2|)\} = \max(|x_1|, |x_2|) + \max(|y_1|, |y_2|) = \nu(X) + \nu(Y)$.