ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 3/2/2012

1. Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Determinare per quali valori di k le matrici A_k, A_k^2 e A_k^3 sono linearmente indipendenti.
b) Determinare al variare di k la dimensione del sottospazio generato da A_k, A_k^2 e A_k^3.

2. Si consideri l'applicazione $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$, definita, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, da

$$[T(p)](t) = p(t + \lambda). \tag{2}$$

a) Dimostrare che l'applicazione T è lineare.
b) Costruire la matrice M associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2, p_3(t) = t^3\}$.
c) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, una base per il nucleo e una base per l'immagine di T.
d) T è invertibile?
e) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, autovalori ed autospazi di T.
f) T è diagonalizzabile?

3. Sia data l'applicazione $g : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definita da

$$g(A, B) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B). \tag{3}$$

a) Dimostrare che g è un prodotto scalare.
b) Scrivere la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{4}$$

c) Il prodotto scalare è definito positivo?
d) Il prodotto scalare è non degenere?
e) Calcolare indici di positività e nullità del prodotto scalare.
f) Determinare una base del complemento ortogonale del sottospazio U costituito dalle matrici simmetriche appartenenti a $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.
g) Determinare una base del complemento ortogonale del sottospazio W costituito dalle matrici antisimmetriche appartenenti a $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.
h) Dire se $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = U \oplus U^\perp$ e se $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = U + U^\perp$. Inoltre dire se $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = W \oplus W^\perp$ e se $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = W + W^\perp$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 3/2/2012

1. a-b) Calcoliamo innazitutto

$$A_k^2 = \begin{pmatrix} k^2+1 & 0 & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k^2+1 \end{pmatrix}, \quad A_k^3 = \begin{pmatrix} 3k^2+1 & 0 & k^3+3k \\ 0 & 1 & 0 \\ k^3+3k & 0 & 3k^2+1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Le tre matrici A_k, A_k^2, A_k^3 sono linearmente indipendenti se e solo se l'equazione

$$x_1 A_k + x_2 A_k^2 + x_3 A_k^3 = 0 \tag{6}$$

implica $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. L'equazione (6) può essere scritta equivalentemente come

$$\begin{pmatrix} x_1+(k^2+1)x_2+(3k^2+1)x_3 & 0 & k[x_1+2x_2+(k^2+3)x_3] \\ 0 & x_1+x_2+x_3 & 0 \\ k[x_1+2x_2+(k^2+3)x_3] & 0 & x_1+(k^2+1)x_2+(3k^2+1)x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

oppure come

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 0, \\ k[x_1+2x_2+(k^2+3)x_3] = 0, \\ x_1+(k^2+1)x_2+(3k^2+1)x_3 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Per $k = 0$ abbiamo $A_0 = A_0^2 = A_0^3 = I$, per cui le tre matrici sono linearmente dipendenti e generano un sottospazio di dimensione uno. Per $k \neq 0$ possiamo dividere la seconda equazione del sistema (8) per k e quindi ridurre a scala la matrice dei coefficienti del sistema come segue:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k^2+3 \\ 1 & k^2+1 & 3k^2+1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k^2+2 \\ 0 & k^2 & 3k^2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k^2+2 \\ 0 & 0 & k^2-k^4 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Per $k \neq 0, \pm 1$ il rango della matrice dei coefficienti è massimo e quindi le tre matrici A_k, A_k^2 e A_k^3 sono linearmente indipendenti e generano un sottospazio di dimensione tre. Per $k = \pm 1$ il rango della matrice dei coefficienti vale due e quindi le tre matrici A_k, A_k^2 e A_k^3 generano un sottospazio di dimensione due.

2. a)

$$[T(\alpha p+\beta q)](t) = (\alpha p+\beta q)(t+\lambda) = \alpha p(t+\lambda)+\beta q(t+\lambda) = \alpha[T(p)](t)+\beta[T(q)](t). \tag{10}$$

b)

$$\begin{cases} [T(p_0)](t) = 1 = p_0(t), \\ [T(p_1)](t) = t+\lambda = \lambda p_0(t)+p_1(t), \\ [T(p_2)](t) = (t+\lambda)^2 = \lambda^2 p_0(t)+2\lambda p_1(t)+p_2(t), \\ [T(p_3)](t) = (t+\lambda)^3 = \lambda^3 p_0(t)+3\lambda^2 p_1(t)+3\lambda p_2(t)+p_3(t). \end{cases} \tag{11}$$

La matrice associata a T rispetto alla base assegnata è quindi data da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 0 & 1 & 2\lambda & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

c) Il nucleo di T contiene solo il vettore nullo, mentre l'immagine di T coincide con $\mathbb{R}_3[t]$.

d) T è invertibile essendo sia iniettiva che suriettiva.

e-f) L'unico autovalore di T è $\phi = 1$, con molteplicità algebrica uguale a quattro. Siccome il rango della matrice $A - \phi I = A - I$ vale tre per $\lambda \neq 0$ e zero per $\lambda = 0$, concludiamo che la molteplicità geometrica dell'autovalore è uguale a uno per $\lambda \neq 0$ e a quattro per $\lambda = 0$. Quindi la matrice risulta diagonalizzabile solo per $\lambda = 0$. L'autospazio V_1 coincide con $\mathbb{R}_3[t]$ per $\lambda = 0$, mentre per $\lambda \neq 0$ abbiamo $\mathcal{B}_{V_1} = \{p_0\}$.

3. a) i)

$$g(B, A) = \mathrm{Tr}(B)\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B) = g(A, B), \tag{13}$$

ii)

$$\begin{aligned} g(A, B + C) &= \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B + C) = \mathrm{Tr}(A)[\mathrm{Tr}(B) + \mathrm{Tr}(C)] \\ &= \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B) + \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(C) = g(A, B) + g(A, C), \end{aligned} \tag{14}$$

iii)

$$g(A, kB) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(kB) = k\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B) = kg(A, B). \tag{15}$$

b) Gli elementi c_{ij} della matrice C associata al prodotto scalare sono per definizione dati da $c_{ij} = g(E_i, E_j)$. Otteniamo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

c) Il prodotto scalare non è definito positivo in quanto, per esempio, $g(E_2, E_2) = 0$ anche se $E_2 \neq 0$.

d) Il prodotto scalare è degenere in quanto, ad esempio, $g(A, E_2) = 0 \; \forall A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ anche se $E_2 \neq 0$.

e) Diagonalizzando la matrice C otteniamo gli autovalori $\lambda_0 = 0$, con molteplicità uguale a tre, e $\lambda_1 = 2$, con molteplicità uguale ad uno. Concludiamo quindi che l'indice di positività del prodotto scalare vale uno, quello di nullità tre.

f) Una base per U è data da

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{17}$$

Imponendo l'ortogonalità di una generica matrice in $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ai vettori di $\mathcal{B}_U$ otteniamo la condizione $a + d = 0$. Quindi $U^\perp$ ha dimensione tre e una sua base è data da

$$\mathcal{B}_{U^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{18}$$

g) Una base per W è data da

$$\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{19}$$

Quindi qualunque matrice in $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ è ortogonale alle matrici di W, in quanto quest'ultime sono a traccia nulla. Quindi $W^\perp = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ e una base per $W^\perp$ è ad esempio quella canonica data nel testo dell'esercizio, $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$.

h) Non è vero che $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = U \oplus U^\perp$ e neppure che $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = W \oplus W^\perp$ in quanto, ad esempio, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ appartiene sia a U che a $U^\perp$, mentre la matrice E_2 appartiene sia a W che a $W^\perp$. Valgono invece sia $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = U + U^\perp$ che $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = W + W^\perp$ in quanto i vettori di base di U e $U^\perp$ messi assieme generano $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, e analogamente per i vettori di base di W e $W^\perp$.