ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 4/2/2008

1. Si considerino le applicazioni $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}_2[t]$ e $G : \mathbf{R}_2[t] \to \mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}_2[t]$ denota lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a due), definite da:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + (x+y)t + zt^2, \quad G(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Dimostrare che $G \circ F$ è un'applicazione lineare.
b) Trovare dimensione e base di $\mathrm{Ker}(G \circ F)$ e $\mathrm{Im}(G \circ F)$.
c) Dire se $G \circ F$ è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

2. Si consideri, al variare di $k \in \mathbf{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

a) Dire per quali valori di k la matrice è invertibile.
b) Trovare in $\mathbf{R}$ autovalori ed autospazi di A al variare di k.
c) Dire per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile in $\mathbf{R}$.

3. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni reali continue nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e sia W il sottospazio vettoriale di V definito da

$$W = \mathrm{Span}(\sin x, \cos x). \tag{3}$$

a) Dimostrare che la forma bilineare $\langle\, , \rangle : W \times W \to \mathbf{R}$, definita da

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \tag{4}$$

è un prodotto scalare definito positivo in W.
b) Verificare che $\left\{\sin x, \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right\}$ è una base di W.
c) Ortogonalizzare tale base con il metodo di Gram-Schmidt.

4. Sia A una matrice reale $n \times n$.
   a) Dimostrare che, se A è diagonalizzabile, anche A^2 lo è ed ha tutti gli autovalori non negativi.
   b) Mostrare che non è vero il viceversa.

5. Risolvere il sistema ricorsivo definito, per $n \geq 0$, da

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n, \\ y_{n+1} = -x_n + 3y_n, \end{cases} \tag{5}$$

   con $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 4/2/2008

1. a) Dati $a, b \in \mathbf{R}$ abbiamo

$$F\left(a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} &= (ax + bx') + (ax + bx' + ay + by')t + (az + bz')t^2 \\ &= a[x + (x + y)t + zt^2] + b[x' + (x' + y')t + z't^2] \\ &= aF\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + bF\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} G(ap + bq) &= \begin{pmatrix} (ap + bq)(0) \\ (ap + bq)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap(0) + bq(0) \\ ap(1) + bq(1) \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} q(0) \\ q(1) \end{pmatrix} = aG(p) + bG(q). \end{aligned} \tag{7}$$

Siccome sia F che G sono lineari anche $G \circ F$ è lineare.
b)

$$(G \circ F)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G(x + (x + y)t + zt^2) = \begin{pmatrix} x \\ 2x + y + z \end{pmatrix}. \tag{8}$$

$$\mathrm{Ker}(G \circ F) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 0,\ 2x + y + z = 0\right\}. \tag{9}$$

Una base di $\mathrm{Ker}(G \circ F)$ è quindi data da

$$\mathcal{B}_K = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}. \tag{10}$$

Quindi $\dim[\mathrm{Ker}(G \circ F)] = 1$ e $\dim[\mathrm{Im}(G \circ F)] = \dim(\mathbf{R}^3) - \dim[\mathrm{Ker}\ (G \circ F)] = 2$. Poiché $\mathrm{Im}(G \circ F)$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$ ed ha la stessa dimensione di $\mathbf{R}^2$, deve necessariamente coincidere con $\mathbf{R}^2$. Una base di $\mathrm{Im}(G \circ F)$ è ad esempio data da

$$\mathcal{B}_I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{11}$$

c) $G \circ F$ è suriettiva ma non iniettiva e quindi non è biiettiva.

2. a) Siccome $\det(A) = k - 1$, la matrice A è invertibile per ogni $k \neq 1$ e non invertibile per $k = 1$.
   b)-c) Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + k - 1), \tag{12}$$

per cui gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ e, per $k \leq 1$, $\lambda_\pm = \pm\sqrt{1-k}$.

Per $k > 1$ l'unico autovalore in $\mathbf{R}$ è λ_1 e il corrispondente autospazio ha come base

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{13}$$

In questo caso la matrice non è diagonalizzabile in $\mathbf{R}$ in quanto la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori (uguale ad 1) è minore del numero di righe e di colonne di A (uguale a 3).

Per $k < 1$, $k \neq 0$, abbiamo tre autovalori reali e distinti, per cui la matrice è diagonalizzabile in $\mathbf{R}$. Basi per i tre autospazi sono date da

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_\pm = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{1 \pm \sqrt{1-k}} \end{pmatrix} \right\}. \tag{14}$$

Per $k = 1$ l'autovalore $\lambda_0 = \lambda_+ = \lambda_- = 0$ ha molteplicità algebrica uguale a due, mentre il corrispondente autospazio ha come base

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{15}$$

Quindi la molteplicità geometrica di questo autovalore è uguale ad 1 e inferiore alla molteplicità algebrica e la matrice non è diagonalizzabile. L'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = 1$ è come nei casi precedenti.

Per $k = 0$ abbiamo $\lambda_1 = \lambda_+ = 1$ e $\lambda_- = -1$. I corrispondenti autospazi hanno come basi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}. \tag{16}$$

In questo caso la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è uguale a 3 e per ogni autovalore la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica. La matrice è quindi diagonalizzabile.

3. a) Data una coppia di vettori f e g, $\langle f, g \rangle$ associa a tale coppia uno scalare. Valgono le proprietà del prodotto scalare:
(i) Per ogni $f, g \in V$, abbiamo

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle, \tag{17}$$

(ii) Dati $f, g, h \in V$, allora

$$\langle f, g + h \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)[g(x) + h(x)]dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)h(x)dx = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle. \tag{18}$$

(iii) Per ogni $f, g \in V$ e per ogni $c \in \mathbf{R}$, abbiamo

$$\langle cf, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} [cf(x)]g(x)dx = c \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = c\langle f, g \rangle. \tag{19}$$

Per dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo in W, scriviamo un generico vettore di W come $v = a \sin x + b \cos x$, con $a, b \in \mathbf{R}$. Abbiamo $\langle v, v \rangle = a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx + b^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx$, che è positivo, a meno che $a = b = 0$ (cioé a meno che $v = 0$).
b) Per dimostrare che $\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \sin x, v_2 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$ è una base

di W osserviamo prima di tutto che $v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$ e che $\cos x = \sqrt{2}v_2 - v_1$. Quindi i vettori v_1 e v_2 generano W. Inoltre sono linearmente indipendenti, in quanto $a\sin(x) + b\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ per tutti gli x in $[-\pi, \pi]$ se e solo se $a = b = 0$.
c) Applicando il metodo di Gram-Schmidt, otteniamo la base ortogonale $\{w_1, w_2\}$, a partire da $\{v_1, v_2\}$. Abbiamo

$$w_1 = v_1 = \sin x,$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$$

$$= \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin x dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x. \tag{20}$$

4. a) Sia $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base di autovettori di A, vale cioé $Av_i = \lambda_i v_i$ per $1 \leq i \leq n$. Siccome $A^2 v_i = A(Av_i) = A(\lambda_i v_i) = \lambda_i(Av_i) = \lambda_i^2 v_i$, ne possiamo concludere che $\mathcal{B}$ è anche una base di autovettori di A^2, con i corrispondenti autovalori $\lambda_i^2 \geq 0$.
b) Basta considerare $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, da cui $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mentre A^2 è diagonalizzabile con autovalore ($\lambda = 0$) non negativo, A non è diagonalizzabile.

5. Conviene scrivere il sistema in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (UA_D U^{-1})^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = U(A_D)^n U^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

dove $A_D = U^{-1}AU$ è la trasformazione di similitudine che diagonalizza A. La matrice A ha come autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$ e come corrispondenti autovettori (normalizzati) $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, da cui

$$(A_D)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = {}^tU = U. \quad (23)$$

Sostituendo le espressioni trovate per $(A_D)^n$ e $U = U^{-1}$ in (22) e considerando $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 3 - 2^n \\ 3 + 2^n \end{pmatrix}. \quad (24)$$