ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 4/2/2010

1. Sia $V = \mathbf{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a due. Si consideri il sottoinsieme

$$W = \{p(t) \in V \mid p(0) = 0\}. \tag{1}$$

a) Dimostrare che W è un sottospazio e trovarne la dimensione e una base.
b) Dimostrare che l'applicazione $g : V \times V \to \mathbf{R}$, definita da

$$g(q,p) = q(0)p(0) + q(1)p(1) \tag{2}$$

è un prodotto scalare.
c) Trovare la dimensione e una base di $W^\perp$, complemento ortogonale di W rispetto al prodotto scalare sopra definito.
d) Trovare la dimensione e una base di $W \cap W^\perp$.
e) Trovare la dimensione e una base di $W + W^\perp$.

2. Si consideri l'applicazione $T : \mathbf{R}_3[t] \to \mathbf{R}_3[t]$, definita da

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = a + (a - 2c)t + (b - d)t^3. \tag{3}$$

a) Dimostrare che T è lineare.
b) Trovare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}(T)$.
c) Trovare la dimensione e una base di $\mathrm{Im}(T)$.
d) Trovare autovalori ed autospazi di T.
e) Discutere la diagonalizzabilità di T.

3. Si consideri l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da

$$f(x,y,z) = (-x + kz, y + kz, y + z), \quad k \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

a) Dimostrare che f è lineare.
b) Trovare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}(f)$ al variare di k.
c) Trovare la dimensione e una base di $\mathrm{Im}(f)$ al variare di k.
d) Discutere la diagonalizzabilità in $\mathbf{R}$ di f al variare di k.

4. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, tale che

$$F(1,1,0) = (1,1,1), \quad F^2(1,1,0) = (0,1,1), \quad F^3 = -I. \tag{5}$$

a) Scrivere la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$, $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.
b) Dimostrare che F è invertibile e calcolare F^{-1}.
c) Trovare in $\mathbf{R}$ autovalori ed autospazi di F.
d) Discutere la diagonalizzabilità in $\mathbf{R}$ di F.
e) Discutere la diagonalizzabilità in $\mathbf{C}$ di F (intesa ora come applicazione lineare da $\mathbf{C}^3$ in $\mathbf{C}^3$).

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 4/2/2010

1. a) Se $p, q \in V$, cioé $p(0) = q(0) = 0$, allora anche $(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0$ e $(cp)(0) = cp(0) = 0$ per ogni $c \in \mathbf{R}$. Abbiamo $\dim(W) = 2$ e una base di W è data da

$$\mathcal{B}_W = \{t, t^2\} \tag{6}$$

b) Sono verificate le proprietà di un prodotto scalare:

$$\begin{aligned} i)\ \forall p, q \in V,\ g(p,q) &= p(0)q(0) + p(1)q(1) \\ &= q(0)p(0) + q(1)p(1) = g(q,p), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} ii)\ \forall p, q, r \in V,\ g(p, q+r) &= p(0)[(q+r)(0)] + p(1)[(q+r)(1)] \\ &= p(0)[q(0) + r(0)] + p(1)[q(1) + r(1)] \\ = p(0)q(0) + p(1)q(1) &+ p(0)r(0) + p(1)r(1) = g(p,q) + g(p,r). \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} iii)\ \forall p, q \in V, \forall c \in \mathbf{R},\ g(p, cq) &= p(0)(cq)(0) + p(1)(cq)(1) \\ &= c[p(0)q(0) + p(1)q(1)] = cg(p,q). \end{aligned} \tag{9}$$

c) Dati due generici vettori $p(t) = at^2 + bt + c \in V$, $q(t) = a't^2 + b't \in W$, la condizione $g(p,q) = 0$ per ogni $q \in W$ impone $(a+b+c)(a'+b') = 0$ per ogni $a', b' \in \mathbf{R}$, da cui $a + b + c = 0$. Quindi $\dim(W^\perp) = 2$ e

$$\mathcal{B}_{W^\perp} = \{1 - t, 1 - t^2\}. \tag{10}$$

d) Imponendo che un polinomio $p(t)$ appartenga sia a W che a $W^\perp$ otteniamo che $p(t)$ è del tipo $p(t) = a(t - t^2)$, da cui $\dim(W \cap W^\perp) = 1$ e

$$\mathcal{B}_{W \cap W^\perp} = \{t - t^2\}. \tag{11}$$

e) Per il teorema di Grassmann, $\dim(W + W^\perp) = \dim(W) + \dim(W^\perp) - \dim(W \cap W^\perp) = 3$, da cui $W + W^\perp = V$ e

$$\mathcal{B}_{W+W^\perp} = \{1, t, t^2\}. \tag{12}$$

2. a) Dati due polinomi $p_1(t) = a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3$, $p_2(t) = a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3$ e due scalari $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

$$T(\alpha p_1+\beta p_2) = T[(\alpha a_1+\beta a_2)+(\alpha b_1+\beta b_2)t+(\alpha c_1+\beta c_2)t^2+(\alpha d_1+\beta d_2)t^3]$$

$$= \alpha a_1 + \beta a_2 + [\alpha a_1 + \beta a_2 - 2(\alpha c_1 + \beta c_2)]t + [\alpha b_1 + \beta b_2 - (\alpha d_1 + \beta d_2)]t^3$$
$$= \alpha[a_1 + (a_1 - 2c_1)t + (b_1 - d_1)t^3] + \beta[a_2 + (a_2 - 2c_2)t + (b_2 - d_2)t^3]$$
$$= \alpha T(p_1) + \beta T(p_2). \tag{13}$$

b) Dato $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$, imponendo $T(p) = 0$ otteniamo $a + (a - 2c)t + (b - d)t^2 = 0 \ \forall t \in \mathbf{R}$, da cui

$$\begin{cases} a = 0, \\ a - 2c = 0, \\ b - d = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Questo sistema ha come soluzione $a = c = 0$, $b = d$. Quindi $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$ e una base per il nucleo è data da

$$\mathcal{B}_K = \{t + t^3\}. \tag{15}$$

c)

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathbf{R}_3[t]) - \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 3. \tag{16}$$

Una base dell'immagine di T è ottenuta applicando T ai vettori $1, t, t^2$, ottenendo cosí tre vettori linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B}_I = \{1 + t, t^3, -2t\}. \tag{17}$$

d) Per costruire la matrice M che rappresenta T rispetto alla base cononica $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ applichiamo T ai vettori della base $\mathcal{B}$:

$$T(1) = 1 + t, \ T(t) = t^3,$$
$$T(t^2) = -2t, \ T(t^3) = -t^3, \tag{18}$$

da cui

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Il polinomio caratteristico

$$p_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1) \tag{20}$$

ha come radici (autovalori) $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. I corrispondenti autospazi $V_0 = \mathrm{Ker}(T)$, V_1, V_2 hanno come basi

$$\mathcal{B}_0 = \{t + t^3\}, \tag{21}$$

$$\mathcal{B}_1 = \{1 + t + \frac{1}{2}t^3\}, \tag{22}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{t^3\}. \tag{23}$$

e) Siccome la molteplicità algebrica di λ_0 è uguale a 2 mentre la molteplicità geometrica è uguale a 1, ne consegue che T non è diagonalizzabile.

3. a) Dati due vettori $X = (x, y, z)$, $X' = (x', y', z')$, e due scalari $a, b \in \mathbf{R}$,

$$f(aX + bX') = f(ax + bx', ay + by', az + bz')$$

$$\begin{aligned} &= (-(ax + bx') + k(az + bz'), ay + by' + k(az + bz'), ay + by' + az + bz') \\ &= a(-x + kz, y + kz, y + z) + b(-x' + kz', y' + kz', y' + z') \\ &= af(X) + bf(X'). \end{aligned} \tag{24}$$

b-c) La matrice A associata ad f rispetto alla base canonica $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ è data da

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Riducendo a scala questa matrice otteniamo

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Quindi $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 3$ per $k \neq 1$ e $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$ per $k = 1$. Di conseguenza, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0$ per $k \neq 1$ e $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$ per $k = 1$.

Per $k \neq 1$, $\mathrm{Im}(A) = \mathbf{R}^3$ e una base dell'immagine è la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Per $k = 1$,

$$\mathcal{B}_K = \{(1, -1, 1)\}, \tag{27}$$

$$\mathcal{B}_I = \{(-1, 0, 0), (0, 1, 1)\}. \tag{28}$$

d) Il polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)[(\lambda - 1)^2 - k] \tag{29}$$

ha come radici -1, $1 - \sqrt{k}$, $1 + \sqrt{k}$.

Per $k < 0$ abbiamo un solo autovalore in $\mathbf{R}$, per cui la matrice non è diagonalizzabile.

Per $k = 0$ gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$ (con molteplicità algebrica 1) e $\lambda_2 = 1$ (con molteplicità algebrica 2). L'autospazio V_2 ha dimensione 1, con base

$$\mathcal{B}_2 = \{(0, 0, 1)\}, \tag{30}$$

per cui A non è diagonalizzabile, essendo la molteplicità geometrica di λ_2 inferiore a quella algebrica.

Per $k = 4$ gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$ (con molteplicità algebrica 2) e $\lambda_2 = 3$ (con molteplicità algebrica 1). L'autospazio V_1 ha dimensione 1, con base

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0)\}, \tag{31}$$

per cui A non è diagonalizzabile, essendo la molteplicità geometrica di λ_1 inferiore a quella algebrica.

Per $0 < k < 4$ e $k > 4$ i tre autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{k}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{k}$ sono distinti, per cui la matrice è diagonalizzabile.

4. a) Le tre condizioni date implicano che

$$F(1, 1, 0) = (1, 1, 1), \quad F(1, 1, 1) = (0, 1, 1), \quad F(0, 1, 1) = -(1, 1, 0). \tag{32}$$

Conosciamo quindi l'azione di F sulla base $\mathcal{B}' = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (0, 1, 1)\}$. Essendo F lineare, questo è sufficiente per determinarla univocamente. La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è data da

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Invertendo tale matrice otteniamo la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Quindi

$$\begin{aligned} F(e_1) &= F(v_2 - v_3) = (0,1,1) + (1,1,0) = e_1 + 2e_2 + e_3, \\ F(e_2) &= F(v_1 - v_2 + v_3) = (1,1,1) - (0,1,1) - (1,1,0) = -e_2, \\ F(e_3) &= F(-v_1 + v_2) = -(1,1,1) + (0,1,1) = -e_1. \end{aligned} \tag{35}$$

Quindi la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B}$ è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

b) A è invertibile in quanto $\det(A) = -1 \neq 0$. Da $F^3 = -I$ otteniamo $A^{-1} = -A^2$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

c) Il polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 1 \tag{38}$$

ha in $\mathbf{R}$ come unica radice (autovalore) $\lambda = -1$. Il corrispondente autospazio è dato da

$$V_\lambda = \{cw,\, c \in \mathbf{R},\, w = e_2\}. \tag{39}$$

d) F non è diagonalizzabile in $\mathbf{R}$ in quanto ha un unico autovalore reale, mentre $\dim(\mathbf{R}^3) = 3$.

e) F è diagonalizzabile in $\mathbf{C}$ in quanto ha tre autovalori distinti: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = (1 + \sqrt{3}i)/2$, $\lambda_3 = (1 - \sqrt{3}i)/2$.