ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 5/7/2013

1. Discutere, al variare di λ sia in $\mathbb{R}$ che in $\mathbb{C}$, la risolubilità del sistema lineare

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda z = 1, \\ -5x + y + z = 2, \\ \lambda^2 x - z = -3. \end{cases} \tag{1}$$

   Quando il sistema è risolubile trovarne le soluzioni.

2. Si consideri l'applicazione $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$, definita da

$$T = D^3 - hD^2 + D + hI, \quad h \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

   con D operatore derivata (quindi D^2 e D^3 indicano la derivata seconda e la derivata terza) e I identità.
   a) Dimostrare che l'applicazione T è lineare.
   b) Costruire la matrice associata a T rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2, p_3(t) = t^3 \right\}. \tag{3}$$

   c) Trovare, al variare di h, una base per il nucleo ed una base per l'immagine di T. Determinare se T è iniettiva, suriettiva, invertibile.
   d) Trovare, per i valori di h per cui T è invertibile, l'inversa T^{-1}.
   e) Determinare, al variare di h, autovalori ed autospazi di T. T è diagonalizzabile?

3. Sia data l'applicazione $g : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definita da

$$g(A, B) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}, \tag{4}$$

   con a_{ij} e b_{ij} elementi di matrice di A e B.
   a) Dimostrare che g è un prodotto scalare.
   b) Il prodotto scalare g è definito positivo? È non degenere?
   c) Determinare una base del complemento ortogonale $U^\perp$ (rispetto al prodotto scalare g) del sottospazio

$$U = \{ A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0 \}. \tag{5}$$

   d) Determinare se $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = U \oplus U^\perp$ e se $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = U + U^\perp$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 5/7/2013

1. La matrice A associata al sistema omogeneo associato e la matrice completa $A^\star$ sono date da

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ -5 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^\star = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda & 1 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \\ \lambda^2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

   Si ha $\det(A) = -\lambda(\lambda^2+1)$. Il sistema ammette un'unica soluzione in $\mathbb{R}$ per $\lambda \neq 0$ e in $\mathbb{C}$ per $\lambda{\neq}0, \pm i$. Tale soluzione può essere determinata ad esempio mediante il metodo di Cramer e otteniamo

$$x = \frac{-3\lambda+1}{\lambda^3+\lambda},\ y = \frac{2\lambda^3-\lambda^2-16\lambda+5}{\lambda^3+\lambda},\ z = \frac{\lambda+3}{\lambda^2+1}. \tag{7}$$

   Per $\lambda = 0$, oppure $\lambda = \pm i$ il sistema è incompatibile dato che rango$(A) = 2 \neq$ rango$(A^\star) = 3$.

2. a) L'applicazione T è lineare in quanto sia la derivata che l'identità sono applicazioni lineari.

   b)

$$T(p_0) = hp_0, \tag{8}$$
$$T(p_1) = p_0 + hp_1, \tag{9}$$
$$T(p_2) = -2hp_0 + 2p_1 + hp_2, \tag{10}$$
$$T(p_3) = 6p_0 - 6hp_1 + 3p_2 + hp_3. \tag{11}$$

   La matrice associata a T rispetto alla base assegnata è quindi data da

$$M = \begin{pmatrix} h & 1 & -2h & 6 \\ 0 & h & 2 & -6h \\ 0 & 0 & h & 3 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}. \tag{12}$$

   c) Siccome $\det(M) = h^4$, l'applicazione T è invertibile per $h \neq 0$. Per $h = 0$ l'applicazione non è né iniettiva né suriettiva, una base del nucleo è data da $\mathcal{B}_K = \{p_0\}$, mentre una base dell'immagine di T è data dai polinomi corrispondenti alle ultime tre colonne di M: $\mathcal{B}_I = \{p_0, 2p_1, 6p_0 + 3p_2\}$.

   d)

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h^2} & \frac{2(1+h^2)}{h^3} & -\frac{6(1+3h^2)}{h^4} \\ 0 & \frac{1}{h} & -\frac{2}{h^2} & \frac{6(1+h^2)}{h^3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{h} & -\frac{3}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

e) Il polinomio caratteristico di M è $p_M(\lambda) = (\lambda - h)^4$. Quindi l'unico autovalore è $\lambda_1 = h$, con molteplicità algebrica $\mu_1 = 4$. Il corrispondente autospazio V_1 (coincidente con il nucleo di T determinato precedentemente per $h = 0$) ha come base, per ogni h, $\{p_0\}$. Quindi la molteplicità geometrica di λ_1, data dalla dimensione di V_1, vale $\nu_1 = 1$. Siccome $\nu_1 < \mu_1$, T non è diagonalizzabile.

3. a) i)

$$g(A, B) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij} = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} a_{ij} = g(B, A). \tag{14}$$

ii)

$$g(A, B+C) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(b_{ij}+c_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij} + \sum_{i.j=1}^{2} a_{ij} c_{ij} = g(A, B)+g(A, C). \tag{15}$$

iii)

$$g(A, kB) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} k b_{ij} = k \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij} = kg(A, B). \tag{16}$$

b) Siccome

$$g(A, A) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^2 \tag{17}$$

non è mai negativo ed è uguale a zero solamente quando tutti gli elementi di matrice $a_{ij} = 0$, vale a dire per $A = 0$, concludiamo che g è definito positivo e quindi anche non degenere.

c) Il sottospazio U ha come base

$$\mathcal{B}_U = \left\{ U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{18}$$

Una base per $U^\perp$ è ottenuta imponendo per una generica matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ le condizioni $g(A, U_1) = g(A, U_2) = g(A, U_2) = 0$, ottenendo quindi $b = c = 0$, $a = d$. Quindi $\dim(U^\perp) = 1$ e una base di $(U^\perp)$ è data da

$$\mathcal{B}_{U^\perp} = \left\{ W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{19}$$

d) Abbiamo $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = U \oplus U^\perp$ e quindi anche $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = U + U^\perp$ in quanto il prodotto scalare g è definito positivo.