ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 6/7/2012

1. Si consideri, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il sistema lineare

$$\begin{cases} (2+\lambda)x + 5y = 1, \\ (3+\lambda)x + (8+\lambda)y = 2, \\ 3x + 8y = 2 + \lambda. \end{cases}$$

Si dica per quali valori di λ il sistema è risolubile e, nel caso in cui lo sia, si trovi la dimensione dell'insieme delle soluzioni e si risolva il sistema.

2. Si consideri l'applicazione $T : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, definita da

$$T(A) = A - {}^tA + \mathrm{tr}(A)\, I \tag{1}$$

con I matrice identità in $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.
a) Dimostrare che l'applicazione T è lineare.
b) Costruire la matrice M associata a T rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2}$$

c) Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine di T.
d) T è iniettiva? È suriettiva? È invertibile?
e) Vale $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$? E $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)$?
f) Determinare autovalori ed autospazi di T.
g) T è diagonalizzabile?

3. Sia data l'applicazione $g : \mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$, definita da

$$g(p_1, p_2) = \int_0^1 p_1'(t) p_2'(t) dt, \tag{3}$$

dove $p' \equiv \frac{dp}{dt}$.
a) Dimostrare che g è un prodotto scalare.
b) Scrivere la matrice associata a tale prodotto scalare rispetto alla base $\mathcal{B} = \{p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2\}$.
c) Il prodotto scalare g è definito positivo?
d) Il prodotto scalare g è non degenere?
e) Calcolare indici di positività e nullità del prodotto scalare g.
f) Determinare una base di $\mathbb{R}_2[t]$ ortogonale rispetto al prodotto scalare g.
g) Determinare una base del complemento ortogonale (rispetto al prodotto scalare g) del sottospazio

$$U = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] \mid p(0) = 0\}. \tag{4}$$

h) Determinare se $\mathbb{R}_2[t] = U \oplus U^\perp$ e se $\mathbb{R}_2[t] = U + U^\perp$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 6/7/2012

1. Chiamando A la matrice dei coefficienti del sistema omgeneo associato e $A^\star$ la matrice per il sistema completo, abbiamo che $\mathrm{rg}(A) \leq 2$. Quindi quando $\mathrm{rg}(A^\star) = 3$ possiamo concludere per il teorema di Rouché-Capelli che il sistema è incompatibile. Siccome $\det(A^\star) = \lambda^2(\lambda+7) \neq 0$ se $\lambda \neq 0, -7$, ne consegue che il sistema non è risolubile per $\lambda \neq 0, -7$. Per $\lambda = 0, 7$ otteniamo $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 2$ e quindi il sistema è risolubile e ammette un'unica soluzione: per $\lambda = 0$, $x = -2$, $y = 1$; per $\lambda = -7$, $x = -\frac{3}{5}$, $y = -\frac{2}{5}$.

2. a)
$$\begin{aligned} T(\alpha A + \beta B) &= \alpha A + \beta B - {}^t(\alpha A + \beta B) + \mathrm{tr}(\alpha A + \beta B)I \\ &= \alpha A + \beta B - \alpha\, {}^tA - \beta\, {}^tB + \alpha \mathrm{tr}(A)I + \beta \mathrm{tr}(B)I \\ &= \alpha[A - {}^tA + \mathrm{tr}(A)I] + \beta[B - {}^tB + \mathrm{tr}(B)I] = \alpha T(A) + \beta T(B). \end{aligned} \tag{5}$$

b)
$$T(E_1) = I = E_1 + E_4, \tag{6}$$
$$T(E_2) = E_2 - E_3, \tag{7}$$
$$T(E_3) = E_3 - E_2, \tag{8}$$
$$T(E_4) = I = E_1 + E_4. \tag{9}$$

La matrice associata a T rispetto alla base assegnata è quindi data da
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

c) $\mathrm{rg}(M) = 2$ in quanto le colonne M^1 e M^2 sono linearmente indipendenti e inoltre $M^3 = -M^2$, $M^4 = M^1$. Quindi $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$ e
$$\mathcal{B}_I = \left\{ I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{11}$$

Inoltre $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$. Una base di $\mathrm{Ker}(T)$ è ricavata risolvendo il sistema $Mx = 0$, con $x \in \mathbb{R}^4$ vettore colonna. Otteniamo
$$\mathcal{B}_K = \left\{ K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{12}$$

d) L'applicazione T non è iniettiva in quanto $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2 > 0$ e neppure suriettiva in quanto $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 < \dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) = 4$. Di conseguenza T non è neppure invertibile.

e) Riducendo a scala la matrice che ha come colonne le coordinate di K_1, K_2, I_1, I_2 rispetto alla base $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ otteniamo
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Quindi K_1, K_2, I_1, I_2 sono linearmente indipendenti e dunque costituiscono una base di $(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}))$, essendo questo spazio vettoriale di dimensione quattro. Concludiamo che vale $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$, e quindi anche $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)$.

f) Il polinomio caratteristico $|\lambda I - M| = [(\lambda-1)^2 - 1]^2$ ha come autovalori (con molteplicità algebrica uguale a due) $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = 2$. Gli autospazi corrispondenti hanno come basi

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_K, \quad \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_I. \tag{14}$$

g) L'applicazione lineare T è diagonalizzabile in quanto la matrice M ad essa associata è simmetrica.

3. a) i)

$$g(p_2, p_1) = \int_0^1 p_2'(t)p_1'(t)dt = \int_0^1 p_1'(t)p_2'(t)dt = g(p_1, p_2), \tag{15}$$

ii)

$$g(p_1, p_2 + p_3) = \int_0^1 p_1'(t)[p_2 + p_3]'(t)dt$$

$$= \int_0^1 p_1(t)p_2'(t)dt + \int_0^1 p_1(t)p_3'(t)dt = g(p_1, p_2) + g(p_1, p_3), \tag{16}$$

iii)

$$g(p_1, kp_2) = \int_0^1 p_1'(t)(kp_2)'(t)dt = \int_0^1 p_1'(t)kp_2'(t)dt$$

$$= k\int_0^1 p_1'(t)p_2'(t)dt = kg(p_1, p_2). \tag{17}$$

b) Gli elementi c_{ij} della matrice C associata al prodotto scalare sono per definizione dati da $c_{ij} = g(p_i, p_j)$. Otteniamo

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

c) Il prodotto scalare non è definito positivo in quanto, per esempio, se $p(t) = 1$, $g(p, p) = 0$ anche se $p \neq 0$.

d) Il prodotto scalare è degenere in quanto, ad esempio, se $p(t) = 1$, $g(p, q) = 0$ per ogni $q \in \mathbb{R}_2[t]$, nonostante sia $p \neq 0$.

e) Diagonalizzando la matrice C otteniamo gli autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{2} > 0$ e $\lambda_3 = \frac{7-\sqrt{37}}{2} > 0$, tutti con molteplicità uguale ad uno. Concludiamo quindi che l'indice di positività del prodotto scalare vale due, quello di nullità uno.

f) Una base ortogonale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}_2[t]$ è ottenuta da una base di autovettori di C:

$$\mathcal{B} = \left\{ q_1(t) = 1,\ q_2(t) = t + \frac{1+\sqrt{37}}{6}t^2,\ q_3(t) = t + \frac{1-\sqrt{37}}{6}t^2 \right\}. \tag{19}$$

g) Una base per U è data da

$$\mathcal{B}_U = \{u_1(t) = t, u_2(t) = t^2\}. \tag{20}$$

Imponendo l'ortogonalità di una generico polinomio $p(t) = a + bt + ct^2 \in \mathbb{R}_2[t]$ ai vettori di $\mathcal{B}_U$ otteniamo le condizioni $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0$ e $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = 0$. Quindi $U^\perp$ ha dimensione uno e una sua base è data da

$$\mathcal{B}_{U^\perp} = \left\{r_1(t) = 1 - 6t + 6t^2\right\}. \tag{21}$$

h) Abbiamo $\mathbb{R}_2[t] = U \oplus U^\perp$ in quanto la matrice M che ha come colonne le coordinate di u_1, u_2, r_1 rispetto alla base canonica $\{p_0, p_1, p_2\}$ ha rango 3.