ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DELL' 8/2/2005

1. Sia data la matrice, definita sul corpo complesso,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Trovare gli autovalori di A.
b) La matrice A è diagonalizzabile?
c) Scrivere una matrice B tale che $A' = B^{-1}AB$ sia diagonale.

2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 e W lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4, cioé

$$\begin{aligned} V &= \{v = a + bx + cx^2 + dx^3,\ a, b, c, d \in \mathbf{R}\}, \\ W &= \{v = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,\ a, b, c, d, e \in \mathbf{R}\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Si consideri l'applicazione $F : V \to W$ definita dalla seguente espressione:

$$F(v) = x^2 \frac{dv}{dx}. \tag{3}$$

a) Dimostrare che F è lineare.
b) Trovare la matrice associata all'applicazione F rispetto alle basi $\mathcal{B}_V = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\mathcal{B}_W = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.
c) Trovare nucleo ed immagine di F.

3. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni reali e continue nell'intervallo $[1, 2]$. Si consideri il sottospazio W generato dalle funzioni dell'insieme

$$B = \left\{ f_1(x) = 1, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = \frac{1}{x+1}, f_4(x) = \frac{1}{x(x+1)} \right\}. \tag{4}$$

a) Determinare se le funzioni dell'insieme B sono linearmente indipendenti e trovare una base per W.
b) Si consideri la trasformazione $T : W \to W$ che associa ad ogni funzione $h \in W$ la funzione $g \in W$, definita come

$$g(x) = \frac{h(1)}{x+1} + h(2), \tag{5}$$

dove $h(1)$ ed $h(2)$ sono i valori assunti dalla funzione $h(x)$ nei punti $x = 1$ ed $x = 2$. Dire se la trasformazione T è lineare e in caso affermativo determinare la matrice associata alla trasformazione T nella base precedentemente scelta.
c) Detta A tale matrice, si risolvano i sistemi lineari $Ax = b$, nei due casi in cui b sia il vettore nullo oppure il vettore con tutte le componenti uguali ad uno.

4. Enunciare il teorema spettrale nel caso di operatori reali simmetrici. Sia A una matrice reale simmetrica $n \times n$. Dimostrare che tutti gli autovalori di A sono positivi se e solo se, per tutti gli $X \in \mathbf{R}^n$, con X diverso dal vettore nullo, $\langle AX, X \rangle > 0$, con $\langle \ , \ \rangle$ prodotto scalare ordinario in $\mathbf{R}^n$, cioé $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$ per tutti gli $X, Y \in \mathbf{R}^n$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DELL' 8/2/2005

1. a) Abbiamo $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1)$. Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_+ = (\sqrt{3} + i)/2$, $\lambda_- = (\sqrt{3} - i)/2$.
b) Poiché gli autovalori sono tutti distinti, i corrispondenti autospazi hanno dimensione uno e qunidi la matrice A è diagonalizzabile.
c) Gli autospazi corrispondenti agli autovalori sopra trovati sono generati dai seguenti autovettori:
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_+ = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$
Prendendo come matrice B la matrice che ha come colonne gli autovettori di A si ottiene
$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

2. a) Dati $v_1, v_2 \in V$ e $a, b \in \mathbf{R}$, abbiamo
$$\begin{aligned} F(av_1 + bv_2) &= x^2 \tfrac{d}{dx}(av_1 + bv_2) = x^2[a\tfrac{d}{dx}(v_1) + b\tfrac{d}{dx}(v_2)] \\ &= ax^2\tfrac{d}{dx}(v_1) + bx^2\tfrac{d}{dx}(v_2) = aF(v_1) + bF(v_2). \end{aligned} \tag{8}$$
b) Siccome
$$\begin{aligned} F(1) &= 0, \\ F(x) &= x^2, \\ F(x^2) &= 2x^3, \\ F(x^3) &= 3x^4, \end{aligned} \tag{9}$$
la matrice associata ad F risulta essere
$$M_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

c) Il nucleo di F comprende i vettori v tali che $F(v) = 0$. Dal punto b) si vede subito che questo è vero se e solo se v è un polinomio costante, cioé $\dim[\mathrm{Ker}(F)] = 1$ ed una base per $\mathrm{Ker}(F)$ è data da $\{1\}$.

Abbiamo poi $\dim[\mathrm{Im}(F)] = \dim(V) - \dim[\mathrm{Ker}(F)] = 4 - 1 = 3$. Una base per $\mathrm{Im}(F)$ è costituita dai vettori $\{F(x) = x^2, F(x^2) = 2x^3, F(x^3) = 3x^4\}$.

3. a) Il generico vettore generato dall'insieme B si scrive come

$$v = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4, \tag{11}$$

con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Abbiamo quindi

$$v(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x(x+1)}. \tag{12}$$

Svolgendo le somme, si vede che

$$v = \frac{ax(x+1) + b(x+1) + cx + d}{x(x+1)} = \frac{ax^2 + (a+b+c)x + b + d}{x(x+1)}. \tag{13}$$

Si deve ora cercare per quali a, b, c, d risulta v uguale alla funzione nulla. Quindi deve essere

$$ax^2 + (a+b+c)x + b + d = 0 \tag{14}$$

per ogni valore di x nell'intervallo $[1, 2]$. Questo avviene se tutti i coefficienti del polinomio di secondo grado sono nulli, cioé se

$$\begin{cases} a = 0, \\ a + b + c = 0, \\ b + d = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Accertato che $a = 0$, il sistema diventa

$$\begin{cases} b + c = 0, \\ b + d = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Tale sistema ammette infinite soluzioni, per cui i vettori dell'insieme B non sono linearmente indipendenti.

Analogamente si dimostra che i primi tre vettori di B sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base dello spazio W generato da B. Un generico vettore di W si può quindi scrivere come

$$w = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3, \tag{17}$$

con α, β, γ reali.

b) La trasformazione definita sopra si può scrivere

$$T(h) = h(2) f_1 + h(1) f_3. \tag{18}$$

Essa è lineare. Infatti, se h, k sono due funzioni in W e a, b numeri reali, abbiamo

$$\begin{gathered} T(ah + bk) = (ah(2) + bk(2)) f_1 + (ah(1) + bk(1)) f_3 \\ = a(h(2) f_1 + h(1) f_3) + b(k(2) f_1 + k(1) f_3) = aT(h) + bT(k). \end{gathered} \tag{19}$$

Per costruire la matrice A associata alle trasformazione T rispetto alla base $\{f_1, f_2, f_3\}$ calcoliamo

$$\begin{array}{l} T(f_1) = f_1 + f_3, \\ T(f_2) = \frac{1}{2} f_1 + f_3, \\ T(f_3) = \frac{1}{3} f_1 + \frac{1}{2} f_3. \end{array} \tag{20}$$

Quindi abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

c) I due sistemi da risolvere sono

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

Il primo sistema è omogeneo e, poiché la matrice A ha rango 2, la dimensione dello spazio delle soluzioni è $3 - 2 = 1$. Sottraendo la prima equazione del sistema omogeneo dalla terza otteniamo $\frac{1}{2}y + \frac{1}{6}z = 0$, da cui $y = -\frac{1}{3}z$. Sostituendo nella prima equazione otteniamo poi $x = -\frac{1}{6}z$. Lo spazio delle soluzioni è quindi una retta in $\mathbf{R}^3$ passante per l'origine. Il sistema non omogeneo non ha soluzioni per il teorema di Rouché-Capelli poiché il rango della matrice

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

vale 3 e quindi $\text{rango}(A^\star) \neq \text{rango}(A)$.

4. Assumiamo prima che tutti gli autovalori di A siano positivi. Per il teorema spettrale, esiste una base ortonormale $\{V_1, ..., V_n\}$ di autovettori di A corrispondenti agli autovalori $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$. Per ogni $X \in \mathbf{R}^n$ possiamo allora scrivere

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i V_i, \tag{25}$$

con $c_i \in \mathbf{R}$. Inoltre

$$AX = \sum_{i=1}^{n} c_i A V_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i V_i. \tag{26}$$

Perciò abbiamo

$$\langle AX, X \rangle = \sum_{i,j} \lambda_i c_i c_j \langle V_i, V_j \rangle = \sum_i \lambda_i |c_i|^2 > 0. \tag{27}$$

La disuguaglianza finale segue dal fatti che $\lambda_i > 0$ e che $X \neq 0$, cioé i coefficienti c_i non possono essere tutti nulli.

Viceversa, assumendo $\langle AX, X \rangle > 0$ per tutti gli $X \neq 0$, abbiamo, per ogni autovettore V_i, $\langle AV_i, V_i \rangle > 0$, da cui $\lambda_i \langle V_i, V_i \rangle > 0$, che implica $\lambda_i > 0$.