ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA 8/3/2011

1. Sia $V = \mathbb{R}_3[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a 3. Sia, per ogni $f \in V$,

$$f(t) = (t-1)q(t) + k, \tag{1}$$

con $k \in \mathbb{R}$, e si consideri l'applicazione $L : V \to V$, definita da

$$L(f) = tq. \tag{2}$$

a) Dimostrare che L è lineare.
b) Calcolare la dimensione e trovare una base sia per il nucleo che per l'immagine di L.
c) Calcolare autovalori ed autovettori di L.
d) Dire se L è diagonalizzabile.

2. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + z = 0, \\ x + y + z = -1, \\ 2x - kz = -1, \\ 2x + ky + (1-k)z = -1, \end{cases} \tag{3}$$

è risolubile e dove risolubile trovarne le soluzioni.

3. Sia data l'applicazione $g : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definita da

$$g(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tBPA), \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

a) Dimostrare che g è un prodotto scalare.
b) Dire se g è definito positivo.
c) Dire se g è non degenere.
d) Calcolare gli indici di positività e di nullità di g.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA 8/3/2011

1. a) Dati due polinomi $f_1, f_2 \in V$, con $f_1(t) = (t-1)q_1(t)+k_1$, $f_2(t) = (t-1)q_2(t)+k_2$, abbiamo

$$L(f_1+f_2) = L[(t-1)(q_1+q_2)+k_1+k_2] = t(q_1+q_2) = tq_1+tq_2 = L(f_1)+L(f_2); \quad (5)$$

inoltre, per ogni $f \in V$, con $f(t) = (t-1)q(t) + k$, e per ogni $c \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$L(cf) = L[(t-1)(cq) + ck] = t(cq) = c(tq) = cL(f). \quad (6)$$

b) Costruiamo la matrice M_L associata all'applicazione lineare rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} L(1) &= L[(t-1)0+1] = 0, \\ L(t) &= L[(t-1)1+1] = t, \\ L(t^2) &= L[(t-1)(t+1)+1] = t+t^2, \\ L(t^3) &= L[(t-1)(t^2+t+1)+1] = t+t^2+t^3, \end{aligned} \quad (7)$$

da cui otteniamo

$$M_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Questa matrice ha rango 3, per cui $\dim[\mathrm{Ker}(L)] = 1$ e $\dim[\mathrm{Im}(L)] = 3$. Siccome $L(1) = 0$ una base del nucleo è data da $\mathcal{B}_K = \{1\}$. Una base dell'immagine è invece data da $\mathcal{B}_I = \{L(t), L(t^2), L(T^3)\} = \{t, t+t^2, t+t^2+t^3\}$.

c) La matrice M_L è triangolare per cui gli autovalori di L sono gli elementi sulla diagonale della matrice, $\lambda_0 = 0$ (con molteplicità algebrica uguale ad 1) e $\lambda_1 = 1$ (con molteplicità algebrica uguale ad 3). I corrispondenti autospazi sono $V_0 = \{a, \ \ a \in \mathbb{R}\}$ e $V_1 = \{bt, \ \ b \in \mathbb{R}\}$.

d) Poiché la molteplicità geometrica di λ_1 è uguale ad uno mentre la molteplicità algebrica è uguale a tre, concludiamo che L non è diagonalizzabile.

2. Scriviamo la matrice dei coefficienti del sistema,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -k \\ 2 & k & 1-k \end{pmatrix} \quad (9)$$

e la matrice completa aggiungendo il vettore colonna dei termini noti,

$$A^\star = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -k & -1 \\ 2 & k & 1-k & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Riducendo a scala $A^\star$ otteniamo

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -k-1 & -1 \\ 0 & 0 & -3k & 2k-2 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Quando il determinante della sottomatrice

$$\begin{vmatrix} -k-1 & -1 \\ -3k & 2k-2 \end{vmatrix} = -2k^2 - 3k + 2 \neq 0 \quad \text{per } k \neq -2, \frac{1}{2} \tag{12}$$

e possiamo concludere che $\mathrm{rg}(A^\star) = 4$ per $k \neq -2, \frac{1}{2}$. Quindi in questo caso $\mathrm{rg}(A^\star) > \mathrm{rg}(A)$ in quanto la matrice A ha tre colonne e il suo rango non può essere maggiore di tre. Quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non è risolubile per $k \neq -2, \frac{1}{2}$. La stessa conclusione poteva essere ottenuta senza operare la riduzione a scala, calcolando $\det(A^\star) = -2k^2 - 3k + 2 \neq 0$ per $k \neq -2, \frac{1}{2}$, per cui in questo caso il rango di $A^\star$ è massimo ed uguale a quattro.

Vanno ora esaminati i casi $k = -2$ e $k = \frac{1}{2}$, per i quali la riduzione a scala operata rende semplice la risoluzione del sistema.

Per $k = -2$ otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 0, \\ 2y + z = -2, \\ z = -1, \\ 6z = -6, \end{cases} \tag{13}$$

quindi il sistema è compatibile e ammette come unica soluzione $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$.

Per $k = \frac{1}{2}$ otteniamo

$$\begin{cases} 2x + z = 0, \\ 2y + z = -2, \\ -\frac{3}{2} z = -1, \\ -\frac{3}{2} z = -1, \end{cases} \tag{14}$$

quindi il sistema è compatibile e ammette come unica soluzione $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

3. a) Per ogni $A, B, C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\text{a) } g(B, A) = \mathrm{Tr}({}^tAPB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAPB))$$

$$= \mathrm{Tr}({}^tB{}^tP{}^t({}^tA)) = \mathrm{Tr}({}^tBPA) = g(A, B), \tag{15}$$

$$\text{b) } g(A, B + C) = \mathrm{Tr}({}^t(B + C)PA) = \mathrm{Tr}(({}^tB + {}^tC)PA)$$

$$= \mathrm{Tr}({}^tBPA + {}^tCPA) = \mathrm{Tr}({}^tBPA) + \mathrm{Tr}({}^tCPA) = g(A, B) + g(A, C), \tag{16}$$

$$\text{c) } g(cA, B) = \mathrm{Tr}({}^tBP(cA)) = c\mathrm{Tr}({}^tBPA) = cg(A, B). \tag{17}$$

b) Consideriamo una generica matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}). \tag{18}$$

Otteniamo

$$g(A, A) = (a + 2c)^2 + (b + 2d)^2. \tag{19}$$

Siccome possiamo trovare una matrice A differente dalla matrice nulla tale che $g(A, A) = 0$, ad esempio scegliendo $a = 2, c = -1, b = d = 0$, possiamo concludere che g non è definito positivo.

c) La stessa matrice $A \neq 0$ scelta come esempio nel punto b) è ortogonale a tutte le matrici nello spazio vettoriale e quindi il prodotto scalare è degenere.

d) Siccome

$$g(A, A) = a^2 + 4ac + 4c^2 + b^2 + 4bd + 4d^2, \tag{20}$$

la matrice associata al prodotto scalare nella base

$$\left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{21}$$

è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Tale matrice ha come autovalori $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = 5$, entrambi con molteplicità uguale a due. Concludiamo quindi che l'indice di positività di g vale due, l'indice di nullità due.