ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 10/2/2006

1. a) Calcolare autovalori ed autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

b) La matrice è diagonalizzabile?

c) Trovare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare $A^2X = -4X$, con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$.

2. a) Dare la definizione di nucleo ed immagine di un'applicazione.

b) Data l'applicazione lineare $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, definita da

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

determinare nucleo ed immagine di A.

3. a) Determinare, al variare di $h \in \mathbf{R}$, il rango e gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & h \end{pmatrix}. \tag{3}$$

b) Dire se, al variare di h, la matrice è diagonalizzabile.

4. Dimostrare che i vettori

$$f_1 = x(x+1)(x+2),\ f_2 = x(x+1),\ f_3 = x,\ f_4 = 1 \tag{4}$$

formano una base per lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore od uguale a 3.

5. Sia $V = \mathbf{R}^2$ e si definisca

$$\langle X, X' \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle = xx' + 2yy' + xy' + yx' \tag{5}$$

per ogni $X, Y \in \mathbf{R}^2$.
a) Dimostrare che effettivamente si tratta di un prodotto scalare.
b) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.
c) Determinare una base di V ortonormale rispetto a questo prodotto scalare.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 10/2/2006

1. a) Gli autovalori sono $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$ e i corrispondenti autospazi hanno come basi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{6}$$

b) La matrice è diagonalizzabile per quanto visto sopra. Si noti che questa conclusione poteva essere tratta dall'inizio essendo la matrice simmetrica.
c) Gli autovalori di A^2 sono i quadrati degli autovalori di A (con gli stessi autovettori), per cui -4 non è autovalore di A^2 e quindi il sistema ammette solo la soluzione banale.

2. b) I vettori in $\mathrm{Im}(A)$ sono della forma

$$\begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

I tre vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

sono linearmente indipendenti e quindi $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 3$, per cui

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathbf{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(A)) = 0. \tag{9}$$

3. a) La matrice ha rango minore od uguale a 2 poiché le prime due righe sono una multipla dell'altra.
Per $h = -\frac{3}{4}$ anche la terza riga è multipla delle altre 2, per cui

rango$(A) = 1$.
Per $h \neq -\frac{3}{4}$, la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ \frac{1}{2} & h \end{pmatrix} \tag{10}$$

ha determinante $-2h - \frac{3}{2} \neq 0$, per cui rango$(A) = 2$.
Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^3 - (h-1)\lambda^2 - \left(h + \frac{3}{4}\right)\lambda. \tag{11}$$

Gli autovalori valgono quindi

$$\lambda_0 = 0, \;\; \lambda_\pm = \frac{h - 1 \pm \sqrt{(h+1)^2 + 3}}{2}. \tag{12}$$

(b) Per $h \neq -\frac{3}{4}$ i tre autovalori sono distinti e quindi la matrice è diagonalizzabile.
Per $h = -\frac{3}{4}$ gli autovalori diventano $\lambda_0 = \lambda_+ = 0$ (con molteplicità algebrica 2) e $\lambda_- = -\frac{7}{4}$ (con molteplicità algebrica 1). Poiché per $h = -\frac{3}{4}$ il rango di A vale 1, allora la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vale $3 - 1 = 2$. Tale spazio è anche l'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_0 = 0$, che quindi ha molteplicità geometrica uguale a 2, cioé uguale alla molteplicità algebrica. Quindi anche per $h = -\frac{3}{4}$ la matrice A è diagonalizzabile.

4. I vettori f_1, f_2, f_3, f_4 sono linearmente indipendenti. Infatti $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0$ implica che

$$a(x^3 + 3x^2 + 2x) + b(x^2 + x) + cx + d \tag{13}$$
$$= ax^3 + (3a + b)x^2 + (2a + b + c)x + d = 0 \tag{14}$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$, da cui

$$\begin{cases} a = 0, \\ 3a + b = 0, \\ 2a + b + c = 0, \\ d = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Questo sistema ammette come unica soluzione $a = b = c = d = 0$, per cui i vettori f_1, f_2, f_3, f_4 sono linearmente indipendenti. Poiché lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a 3 ha dimensione 4 questi vettori costituiscono una base per tale spazio vettoriale.

5. a) Abbiamo

$$\langle X', X\rangle = x'x + 2y'y + x'y + y'x = \langle X, X'\rangle. \tag{16}$$

Allo stesso modo si verifica per calcolo diretto che $\langle X, X' + X''\rangle = \langle X, X'\rangle + \langle X, X''\rangle$ e che $\langle X, cX'\rangle = c\langle X, X'\rangle$.
b) $\langle X, X\rangle = x^2 + 2y^2 + 2xy = (x + y)^2 + y^2$. Quindi $\langle X, X\rangle \geq 0$ e uguale a 0 solamente se $X = 0$.
c) Usiamo Gram-Schmidt per ortogonalizzare la base

$$\{V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}. \tag{17}$$

Una base ortogonale è composta dai vettori

$$\begin{aligned} &W_1 = V_1, \\ &W_2 = V_2 - \tfrac{\langle V_2, W_1\rangle}{\langle W_1, W_1\rangle} W_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{18}$$

Si noti come i vettori della base $\{W_1, W_2\}$ siano anche normalizzati.