ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 10/9/2012

1. Si consideri, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + y + \lambda z = \lambda, \\ x + (2-\lambda)y = 0, \\ x + (2-\lambda)y + \lambda z = \lambda. \end{cases}$$

Si dica per quali valori di λ il sistema è risolubile e, nel caso in cui lo sia, si trovi la dimensione dell'insieme delle soluzioni e si risolva il sistema.

2. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione $\phi_k : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, definita da

$$\phi_k(A) = A + k\,({}^t A). \tag{1}$$

a) Dimostrare che l'applicazione ϕ_k è lineare.
b) Costruire la matrice M_k associata a ϕ_k rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2}$$

c) ϕ_k è iniettiva? È suriettiva? È invertibile?
d) Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine di ϕ_k.
e) Vale $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\phi_k) \oplus \mathrm{Im}(\phi_k)$? E $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\phi_k) + \mathrm{Im}(\phi_k)$?
f) Determinare autovalori ed autospazi di ϕ_k.
g) ϕ_k è diagonalizzabile?

3. Sia data l'applicazione $g : \mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$, definita da

$$g(p_1, p_2) = \int_{-1}^{1} t\, p_1(t)\, p_2(t) dt. \tag{3}$$

a) Dimostrare che g è un prodotto scalare.
b) Il prodotto scalare g è definito positivo?
c) Il prodotto scalare g è non degenere?
d) Scrivere la matrice associata a tale prodotto scalare rispetto alla base $\mathcal{B} = \{p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2\}$.
e) Calcolare indici di positività e nullità del prodotto scalare g.
f) Determinare una base del complemento ortogonale (rispetto al prodotto scalare g) del sottospazio

$$U = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] \mid p(0) = 0\}. \tag{4}$$

g) Determinare se $\mathbb{R}_2[t] = U \oplus U^\perp$ e se $\mathbb{R}_2[t] = U + U^\perp$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 10/9/2012

1. Chiamando A la matrice dei coefficienti del sistema omgeneo associato e $A^\star$ la matrice per il sistema completo, abbiamo che $\mathrm{rg}(A) \leq 3$. Quindi quando $\mathrm{rg}(A^\star) = 4$ possiamo concludere per il teorema di Rouché-Capelli che il sistema è incompatibile. Siccome $\det(A^\star) = -(\lambda^2 - \lambda) \neq 0$ se $\lambda \neq 0, 1$, ne consegue che il sistema non è risolubile per $\lambda \neq 0, 1$. Per $\lambda = 0$ otteniamo $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 3$ e quindi il sistema (che in questo caso è omogeneo) è risolubile e ammette come unica soluzione quella banale: $x = y = z = 0$. Per $\lambda = 1$, $\mathrm{rg}(A) = 2 \neq \mathrm{rg}(A^\star) = 3$ e quindi il sistema non è risolubile.

2. a)

$$\begin{aligned}\phi_k(\alpha A + \beta B) &= \alpha A + \beta B + k^t(\alpha A + \beta B) \\ &= \alpha A + \beta B + k(\alpha\, {}^tA + \beta\, {}^tB) \\ &= \alpha(A + k^tA) + \beta(B + k^tB) = \alpha\phi_k(A) + \beta\phi_k(B). \end{aligned} \tag{5}$$

b)

$$\phi_k(E_1) = (1 + k)E_1, \tag{6}$$
$$\phi_k(E_2) = E_2 + kE_3, \tag{7}$$
$$\phi_k(E_3) = kE_2 + E_3, \tag{8}$$
$$\phi_k(E_4) = (1 + k)E_4. \tag{9}$$

La matrice associata a ϕ_k rispetto alla base assegnata è quindi data da

$$M_k = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}. \tag{10}$$

c) $\det(M_k) = (1 + k)^2(1 - k^2) \neq 0$ per $k \neq \pm 1$. Quindi per $k \neq \pm 1$ l'applicazione ϕ_k è invertibile e quindi anche iniettiva e suriettiva. Nei due casi $k = 1$ e $k = -1$ l'applicazione non è invertibile e quindi, essendo un endomorfismo, non è né suriettiva né iniettiva. Infatti nel caso di endomorfismi l'iniettività implica anche la suriettività (come conseguenza della relazione $\dim(\mathrm{Im}(\phi_k)) = \dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Ker}(\phi_k)) = \dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) \Rightarrow \mathrm{Im}(\phi_k) = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$) e quindi l'invertibilità e allo stesso modo la suriettività implica anche l'iniettività e quindi l'invertibilità.

d) Per $k \neq \pm 1$, $\mathrm{Ker}(\phi_k) = \{0\}$, $\mathrm{Im}(\phi_k) = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Per $k = 1$,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

e quindi

$$\mathcal{B}_I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{12}$$

Inoltre $\dim(\mathrm{Ker}(\phi_k)) = \dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Im}(\phi_k)) = 1$. Una base di $\mathrm{Ker}(\phi_k)$ è ricavata risolvendo il sistema $M_1 x = 0$, con $x \in \mathbb{R}^4$ vettore colonna. Otteniamo

$$\mathcal{B}_K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{13}$$

Per $k = -1$,

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

e quindi

$$\mathcal{B}_I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \tag{15}$$

$$\mathcal{B}_K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{16}$$

e) Per tutti i valori di k vale $\dim(\mathrm{Ker}(\phi_k)) + \dim(\mathrm{Im}(\phi_k)) = \dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}))$ e $\mathrm{Ker}(\phi_k) \cap \mathrm{Im}(\phi_k) = \{0\}$, per cui $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\phi_k) \oplus \mathrm{Im}(\phi_k)$ e quindi vale anche $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\phi_k) + \mathrm{Im}(\phi_k)$.

f) Il polinomio caratteristico $|\lambda I - M_k| = [\lambda - (1+k)]^2[(\lambda - 1)^2 - k^2]$ ha come radici $1 + k$ e $1 - k$.

Per $k = 0$, $M_0 = I$ e quindi l'unico autovalore è $\lambda_1 = 1$, con molteplicità algebrica e geometrica uguale a quattro. L'autospazio $V_1 = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Per $k \neq 0$ abbiamo due autovalori, $\lambda_+ = 1 + k$, con molteplicità algebrica e geometrica uguale a tre e $\lambda_- = 1 - k$, con molteplicità algebrica e geometrica uguale ad uno. Basi per gli autospazi corrispondenti sono date da

$$\mathcal{B}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \tag{17}$$

$$\mathcal{B}_- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{18}$$

g) L'applicazione lineare ϕ_k è diagonalizzabile in quanto la matrice M_k ad essa associata è simmetrica.

3. a) i)

$$g(p_2, p_1) = \int_{-1}^{1} t p_2(t) p_1(t) dt = \int_{-1}^{1} t p_1(t) p_2(t) dt = g(p_1, p_2), \tag{19}$$

ii)

$$g(p_1, p_2 + p_3) = \int_{-1}^{1} t p_1(t)(p_2 + p_3)(t) dt$$

$$= \int_{-1}^{1} t p_1(t) p_2(t) dt + \int_{-1}^{1} t p_1(t) p_3(t) dt = g(p_1, p_2) + g(p_1, p_3), \tag{20}$$

iii)

$$g(p_1, kp_2) = \int_{-1}^{1} tp_1(t)(kp_2)(t)dt = \int_{-1}^{1} tp_1(t)kp_2(t)dt$$
$$= k\int_{-1}^{1} tp_1(t)p_2(t)dt = kg(p_1, p_2). \tag{21}$$

b) Il prodotto scalare non è definito positivo in quanto, per esempio, se $p(t) = 1$, $g(p, p) = 0$ anche se $p \neq 0$.

c) Il prodotto scalare è degenere in quanto, imponendo l'ortogonalità di un generico polinomio $p(t) = at^2+bt+c \in \mathbb{R}_2[t]$ ai vettori della base canonica di $\mathbb{R}_2[t]$ otteniamo $g(p, 1) = \frac{2}{3}\, b = 0$, $g(p, t) = \frac{2}{5}\, a + \frac{2}{3}\, c = 0$, $g(p, t^2) = \frac{b}{5} = 0$, e tutte e tre le condizioni possono essere soddisfatte simultaneamente da polinomi diversi dal polinomio nullo, ad esempio dal polinomio $p(t) = 5t^2 - 3$.

d) Gli elementi c_{ij} della matrice C associata al prodotto scalare sono per definizione dati da $c_{ij} = g(p_i, p_j)$. Otteniamo

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

e) Diagonalizzando la matrice C otteniamo gli autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{2\sqrt{34}}{15} > 0$ e $\lambda_3 = -\frac{2\sqrt{34}}{15} < 0$, tutti con molteplicità uguale ad uno. Concludiamo quindi che l'indice di positività del prodotto scalare vale uno, quello di nullità uno.

f) Una base per U è data da

$$\mathcal{B}_U = \{u_1(t) = t, u_2(t) = t^2\}. \tag{23}$$

Imponendo l'ortogonalità di una generico polinomio $p(t) = at^2 + bt + c \in \mathbb{R}_2[t]$ ai vettori di $\mathcal{B}_U$ otteniamo le condizioni $\frac{a}{5} + \frac{c}{3} = 0$ e $b = 0$. Quindi $U^\perp$ ha dimensione uno e una sua base è data da

$$\mathcal{B}_{U^\perp} = \left\{r_1(t) = 5t^2 - 3\right\}. \tag{24}$$

g) Abbiamo $\mathbb{R}_2[t] = U \oplus U^\perp$ (e quindi anche $\mathbb{R}_2[t] = U + U^\perp$) in quanto la matrice M che ha come colonne le coordinate di u_1, u_2, r_1 rispetto alla base canonica $\{p_0, p_1, p_2\}$ ha rango 3.