ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 13/9/2004

1. Si dimostri che le matrici

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

costituiscono una base per lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 sul corpo complesso.

2. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita, nella base $\{e_1, e_2, e_3\}$, da

$$\begin{cases} L(e_1) = -e_1 + e_2, \\ L(e_2) = e_1 - e_2, \\ L(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases} \tag{2}$$

a) Determinare nucleo ed immagine di L.
b) Trovare autovalori ed autovettori della matrice associata ad L.
c) Trovare il vettore $L(v)$ e l'insieme $L^{-1}(v)$, dove $v = e_1 + e_2 + e_3$.

3. Stabilire in dipendenza da $k \in \mathbf{R}$ se l'operatore $O : \mathbf{R}^2 \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, definito da

$$O \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & (k+1)b \\ ka & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

è lineare e in caso affermativo determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di O. Si determini infine una base per ciascuno di essi.

4. Dato lo spazio vettoriale V delle funzioni reali continue nell'intervallo $[0, 1]$, si definisca

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx. \tag{4}$$

a) Si dimostri che $\langle f, g \rangle$ è un prodotto scalare.
b) Dato il sottospazio W generato dalle funzioni $f_1(x) = 1$ e $f_2(x) = x$, trovare una base ortonormale di tale sottospazio.

5. Dare la definizione di spazio vettoriale.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 13/9/2004

1. Le matrici $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono linearmente indipendenti poiché $\alpha\sigma_0 + \beta\sigma_1 + \gamma\sigma_2 + \delta\sigma_3 = 0$ implica

$$\begin{pmatrix} \alpha+\delta & \beta-i\gamma \\ \beta+i\gamma & \alpha-\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

da cui $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Tali matrici costituiscono anche una base poiché, data una generica matrice 2×2

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, \tag{6}$$

possiamo scrivere M come combinazione lineare di $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ e σ_3, cioé abbiamo $M = \alpha\sigma_0 + \beta\sigma_1 + \gamma\sigma_2 + \delta\sigma_3$, pur di prendere $\alpha = (x+w)/2$, $\delta = (x-w)/2$, $\beta = (y+z)/2$ e $\gamma = i(y-z)/2$.

2. a) La matrice associata all'operatore è

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Il nucleo di L comprende i vettori $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $L(v) = 0$. Questo implica

$$\begin{cases} -x+y-z=0, \\ x-y+z=0, \\ z=0, \end{cases} \tag{8}$$

da cui $x = y$, $z = 0$. Una base di $\mathrm{Ker}(L)$ è dunque $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Una base di $\mathrm{Im}(L)$ è data da

$$\left\{ L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{9}$$

b) Il polinomio caratteristico di L è

$$p_L(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+2). \tag{10}$$

Dunque gli autovalori di L sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. I corrispondenti autovettori sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

c) Nella base $\{e_1, e_2, e_3\}$ abbiamo $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi $L(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'insieme $L^{-1}(v)$ è formato dai vettori $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $L(u) = v$. Quindi

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y-z \\ x-y+z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Tale sistema non ammette soluzioni, per cui $L^{-1}(v)$ è l'insieme vuoto.

3. Dati due qualunque vettori $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ e due qualunque scalari $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, si ha

$$O(\alpha v_1 + \beta v_2) = O \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c \\ \alpha b + \beta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b & (k+1)(\alpha a + \beta b) \\ k(\alpha a + \beta b) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a & (k+1)a \\ ka & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b & (k+1)b \\ kb & 0 \end{pmatrix} = \alpha O(a) + \beta O(b). \tag{13}$$

Quindi O è un operatore lineare per ogni $k \in \mathbf{R}$.

Il nucleo di O è costituito da tutti i vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tali che

$$O\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & (k+1)b \\ ka & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Distinguiamo due casi:
(i) $k \neq -1$ - Dalla (14) ricaviamo $a = b = 0$, da cui $\dim[\mathrm{Ker}(O)] = 0$ e $\dim[\mathrm{Im}(O)] = 2 - \dim[\mathrm{Ker}(O)] = 2$. Una base per $\mathrm{Im}(O)$ è costituita da

$$\left\{ O\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix},\ O\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{15}$$

(ii) $k = -1$ - Dall'equazione (14) otteniamo $a = 0$ e b qualunque. Quindi $\dim[\mathrm{Ker}(O)] = 1$ e $\dim[\mathrm{Im}(O)] = 2 - 1 = 1$. I vettori di $\mathrm{Ker}(O)$ hanno la forma $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, con $b \in \mathbf{R}$. Ne segue che una base per $\mathrm{Ker}(O)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Poiché per $k = -1$ gli elementi di $\mathrm{Im}(O)$ sono della forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, ne segue che una base per $\mathrm{Im}(O)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

4. a) Data una coppia di vettori f e g, $\langle f, g\rangle$ associa a tale coppia uno scalare. Valgono le proprietà del prodotto scalare:
(i) Per ogni $f, g \in V$, abbiamo

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx = \langle g, f\rangle, \tag{16}$$

(ii) Dati $f, g, h \in V$, allora

$$\langle f, g+h\rangle = \int_0^1 f(x)[g(x) + h(x)]dx$$

$$= \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f(x)h(x)dx = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle. \tag{17}$$

(iii) Per ogni $f, g \in V$ e per ogni $c \in \mathbf{R}$, abbiamo

$$\langle cf, g\rangle = \int_0^1 [cf(x)]g(x)dx = c\int_0^1 f(x)g(x)dx = c\langle f, g\rangle. \tag{18}$$

b) Applicando il metodo di Gram-Schmidt, otteniamo la base ortogonale $\{g_1, g_2\}$, a partire da $\{f_1, f_2\}$. Abbiamo

$$g_1 = f_1 = 1, \quad g_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, g_1 \rangle}{\langle g_1, g_1 \rangle} g_1 = x - \frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 dx} = x - \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Possiamo poi passare ad una base ortonormale $\{h_1, h_2\}$:

$$h_1 = \frac{g_1}{||g_1||} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 dx}} = 1,$$

$$h_2 = \frac{g_2}{||g_2||} = \frac{x - 1/2}{\sqrt{\int_0^1 (x - 1/2)^2 dx}} = \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2} \right). \tag{20}$$