ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 14/7/2009

1. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$
a) provare che i sottoinsiemi $F, G \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, definiti da
$$F = \{X \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \mid AX = XA\}, \tag{2}$$
$$G = \{X \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \mid AX = -XA\}, \tag{3}$$
sono anche sottospazi;
b) trovare una base per F e una base per G;
c) trovare dimensione e base di $F \cap G$ e di $F + G$.

2. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^4$ sono sottospazi e in caso di risposta affermativa trovarne una base:
$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_4 = 1\}, \tag{4}$$
$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 1\}, \tag{5}$$
$$W_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x_1 - x_2 + x_4 = 0\}, \tag{6}$$
$$W_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\}. \tag{7}$$

3. Date le applicazioni lineari $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, definite da
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 - x_4, 3x_2 - x_3 + 2x_4), \tag{8}$$
$$g(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_2, -2x_1 + x_2), \tag{9}$$
determinare la dimensione e una base sia per $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ che per $\mathrm{Im}(g \circ f)$. Dire se $g \circ f$ è iniettiva, suriettiva e biiettiva.

4. a) Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & k^2 & 0 \\ k^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$
rappresenta un prodotto scalare definito positivo.
b) Per quali k il prodotto scalare è degenere?

5. a) Calcolare, al variare di $h \in \mathbf{R}$, autovalori ed autospazi dellla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -h & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

b) Per quali h la matrice è diagonalizzabile?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 14/7/2009

1. a) Dati $A, B \in F$, $c \in \mathbf{R}$, abbiamo

$$(A+B)X = AX + BX = XA + XB = X(A+B), \tag{12}$$

$$(cA)X = c(AX) = c(XA) = X(cA), \tag{13}$$

per cui anche $A+B$ e cA appartengono a F. La dimostrazione per G è analoga.

b) Scrivendo una generica matrice $X \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ come

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{14}$$

verifichiamo che la condizione $AX = XA$ impone $d = a$, $c = b$, mentre la condizione $AX = -XA$ impone $d = -a$, $c = -b$. Quindi $\dim(F) = \dim(G) = 2$ e

$$\mathcal{B}_F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \tag{15}$$

$$\mathcal{B}_G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{16}$$

c) Le condizioni $d = a$, $c = b$, $d = -a$, $c = -b$ sono verificate simultaneamente solo dalla matrice nulla per cui $\dim(F \cap G) = 0$ e $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 4$. Quindi $F \cap G$ contiene solo la matrice nulla, mentre $F + G = F \oplus G = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$.

2. I sottoinsiemi W_1 e W_2 non sono sottospazi in quanto non contengono il vettore nullo. Neppure W_4 è un sottospazio in quanto non è chiuso rispetto alla somma. Infatti, dati i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,-1,0,0)$, entrambi appartenenti a W_4, abbiamo che $v_1 + v_2 = (2,0,0,0)$ non appartiene a W_4. Invece W_3 è un sottospazio. Infatti, scrivendo W_3 nella forma equivalente

$$W_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_2 - 2x_1) \,|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\} \tag{17}$$

e considerando generici vettori $u = (x_1, x_2, x_3, x_2 - 2x_1)$, $v = (y_1, y_2, y_3, y_2 - 2y_1) \in W_3$ e numeri real a, b, abbiamo

$$au + bv = [ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3, ax_2 + by_2 - 2(ax_1 + by_1)] \in W_3. \tag{18}$$

Una base di W_3 è data da

$$\mathcal{B}_{W_3} = \{(1, 0, 0, -2), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\} \tag{19}$$

3. Le matrici associate a f e g rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^4$ sono date da

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

La matrice associata a $g \circ f$ è quindi

$$M_{g\circ f} = M_g M_f = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Riducendo a scala la matrice $M_{g\circ f}$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Quindi $\dim[\mathrm{Im}(g \circ f)] = \mathrm{rg}(g \circ f) = 2$ e

$$\mathrm{B}_I = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}. \tag{24}$$

Ne consegue che $\dim[\mathrm{Ker}(g \circ f)] = 4 - 2 = 2$. La base del nucleo di $g \circ f$ è ottenuta risolvendo il sistema (già ridotto sopra a scala)

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Una base del nucleo è quindi data da

$$\mathcal{B}_K = \left\{ \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/6 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{26}$$

L'applicazione lineare $g \circ f$ non è né iniettiva in quanto la dimensione del nucleo è maggiore di zero né suriettiva in quanto la dimensione dell'immagine è minore della dimensione di $\mathbf{R}^3$. Quindi $g \circ f$ non è neppure biiettiva.

4. a) È sufficiente calcolare gli autovalori di A e vedere per quali k gli autovalori sono tutti positivi. Il polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)[(\lambda - 1)^2 - k^4] \tag{27}$$

ha come radici $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + k^2$, $\lambda_3 = 1 - k^2$. Siccome $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ per ogni k basta controllare il segno di λ_3. Abbiamo $\lambda_3 > 0$ (e quindi il prodotto scalare definito positivo) per $-1 < k < 1$.

b) Il prodotto scalare è degenere quando almeno un autovalore è nullo, quindi per $k = \pm 1$.

5. a) Il polinomio caratteristico è dato da

$$p_M(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2), \tag{28}$$

per cui gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ (con molteplicità algebrica uguale a 2) e $\lambda_2 = 2$ (con molteplicità algebrica uguale a 1). I corrispondenti autospazi hanno come basi

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{29}$$

e, per $h \neq 0$,

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \tag{30}$$

mentre, per $h = 0$,

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{31}$$

b) Solo per $h = 0$ la molteplicità geometrica di λ_1 è uguale a quella algebrica e quindi la matrice è diagonalizzabile solo per $h = 0$.