ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 14/7/2011

1. Si considerino lo spazio $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 su $\mathbb{R}$ e la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Sia $T : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'applicazione definita, per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ da $T(A) = MA$.
a) Dimostrare che T è lineare.
b) Calcolare il determinante di T.
c) Dire se T è invertibile.
d) Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine di T.

2. Si consideri la matrice
$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$
a) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, autovalori ed autospazi di M.
b) Dire per quali valori di a è diagonalizzabile M.

3. Dato lo spazio vettoriale V delle funzioni reali continue nell'intervallo $[0, 1]$, si definisca
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx. \tag{2}$$
a) Si dimostri che $\langle f, g\rangle$ è un prodotto scalare.
b) Dato il sottospazio W generato dalle funzioni $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, trovare una base di tale sottospazio che sia ortogonale rispetto al prodotto scalare sopra definito.
c) Dimostrare che il sottoinsieme U delle funzioni di W che si annullano in $x = 1/2$ è un sottospazio di W e trovare la dimensione e una base di U.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 14/7/2011

1. a) Dati $A, B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, abbiamo $T(\alpha A + \beta B) = M(\alpha A + \beta B) = \alpha MA + \beta MB = \alpha T(A) + \beta T(B)$.
b) Scegliendo la base canonica

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{3}$$

di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, abbiamo

$$\begin{array}{l} T(E_1) = E_1 + 2E_3, \\ T(E_2) = E_2 + 2E_4, \\ T(E_3) = 2E_1 + 4E_3, \\ T(E_4) = 2E_2 + 4E_4. \end{array} \tag{4}$$

Quindi la matrice associata all'applicatione T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è data da

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Il determinante dell'applicazione, che è indipendente dalla base scelta per ottenere la rappresentazione matriciale di T, vale $\det(T) = \det(M_T) = 0$. L'annullarsi del determinante discende immediatamente dal fatto che la terza riga è multipla della prima (e la quarta della seconda), vale a dire che le righe (e le colonne) della matrice non sono indipendenti.
c) Poiché $\det(T) \neq 0$ l'applicazione non è invertibile.
d)

$$\mathcal{B}_I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \tag{6}$$

$$\mathcal{B}_K = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{7}$$

2. Il polinomio caratteristico è $p_M(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - a)$. Quindi, per $a \neq 0, 2$ i tre autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = a$ sono distinti, per cui la matrice risulta diagonalizzabile. Basi dei corrispondenti autospazi sono in questo caso date da

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a-2} \\ \frac{a-1}{a-2} \end{pmatrix} \right\}. \tag{8}$$

Per $a = 0$ l'autovalore $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità algebrica 2, mentre $\lambda_2 = 2$ ha molteplicità algebrica 1. I corrispondenti autospazi sono dati da

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{9}$$

In questo caso le molteplicità geometriche coincidono con quelle algebriche e quindi la matrice è diagonalizzabile.

Per $a = 2$ l'autovalore $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità algebrica 1, mentre $\lambda_2 = 2$ ha molteplicità algebrica 2. I corrispondenti autospazi sono dati da

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{10}$$

In questo caso la molteplicità geometricha dell'autovalore $\lambda_2 = 2$ vale 1 ed è minore di quella algebrica e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

3. a) Data una coppia di vettori f e g, $\langle f, g\rangle$ associa a tale coppia uno scalare. Valgono le proprietà del prodotto scalare:
(i) Per ogni $f, g \in V$, abbiamo

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx = \langle g, f\rangle; \tag{11}$$

(ii) dati $f, g, h \in V$, allora

$$\begin{aligned} \langle f, g+h\rangle &= \int_0^1 f(x)[g(x)+h(x)]dx \\ &= \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f(x)h(x)dx = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle; \end{aligned} \tag{12}$$

(iii) per ogni $f, g \in V$ e per ogni $c \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\langle cf, g\rangle = \int_0^1 [cf(x)]g(x)dx = c\int_0^1 f(x)g(x)dx = c\langle f, g\rangle. \tag{13}$$

b) Applicando il metodo di Gram-Schmidt, otteniamo la base ortogonale $\{g_1, g_2, g_3\}$, a partire da $\{f_1, f_2, f_3\}$. Abbiamo

$$g_1 = f_1 = 1, \tag{14}$$

$$g_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1 = x - \frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 dx} = x - \frac{1}{2}, \tag{15}$$

$$g_3 = f_3 - \frac{\langle f_3, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1 - \frac{\langle f_3, g_2\rangle}{\langle g_2, g_2\rangle} g_2 = x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 dx} - \frac{\int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx}{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx} \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}. \tag{16}$$

c) Se $u_1, u_2 \in U$, vale a dire $u_1(1/2) = u_2(1/2) = 0$, allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, abbiamo $(au_1+bu_2)(1/2) = au_1(1/2)+bu_2(1/2) = 0$, per cui $au_1+bu_2 \in U$, e quindi U è un sottospazio di W. Dato un generico vettore in $w(x) = ax^2 + bx + c \in W$, la condizione $w(x) \in U$ impone $w(1/2) = 0$, da cui $a/4 + b/2 + c = 0$, per cui $w(x) = ax^2 + bx - a/4 - b/2$. Quindi $\dim(U) = 2$ e una base di U è data da $\mathcal{B}_U = \{x^2 - 1/4, x - 1/2\}$.