ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 15/2/2011

1. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi vettoriali:

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{Span}(u_1 = (1,0,1,0), u_2 = (0,1,0,1), u_3 = (k^2,k,1,1)), \\ W &= \mathrm{Span}(w_1 = (0,1,-1,0), w_2 = (0,k,2k,0)), \end{aligned} \tag{1}$$

con k parametro reale. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$,
a) la dimensione e una base sia per U che per W;
b) la dimensione e una base di $U + W$;
c) la dimensione e una base di $U \cap W$;
d) dire per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

2. Si consideri l'applicazione $\phi : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ (con $\mathbb{R}_2[t]$ spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a due), definita da

$$\phi(p) = t\,\frac{dp}{dt} - (t+1)^2\,\frac{d^2p}{dt^2}. \tag{2}$$

a) Dimostrare la linearità di ϕ,
b) Scrivere la matrice associata a ϕ rispetto alla base $\{1, t, t^2\}$ di $\mathbb{R}_2[t]$.
c) Determinare la dimensione e una base sia per il nucleo che per l'immagine di ϕ.
d) Calcolare autovalori ed autospazi di ϕ.
e) Dire se ϕ è diagonalizzabile.

3. Sia $\mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a due.
a) Dimostrare che l'applicazione $g : \mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$, definita da

$$g(p,q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \tag{3}$$

è un prodotto scalare.
b) Dimostrare che il sottoinsieme

$$W = \{p \in \mathbb{R}_2[t] \mid p(t) = p(-t)\ \forall t \in \mathbb{R}\} \tag{4}$$

è un sottospazio.
c) Trovare la dimensione e una base di W.
d) Trovare la dimensione e una base di $W^\perp$, complemento ortogonale di W rispetto al prodotto scalare sopra definito.
e) Dire se g è definito positivo.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 15/2/2011

1. a) Riducendo a scala la matrice che ha come colonne u_1, u_2, u_3 otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1-k^2 \\ 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Le tre colonne sono linearmente dipendenti quando $1-k^2=0$ e $1-k=0$, vale a dire per $k=1$. Quindi per $k=1$ abbiamo $\dim(U)=2$ e $\mathcal{B}_U=\{u_1,u_2\}$ (questi due vettori sono linearmente indipendenti non essendo uno multiplo dell'altro). Per $k\neq 1$, $\dim(U)=3$ e $\mathcal{B}_U=\{u_1,u_2,u_3\}$.
Procedendo in modo analogo per W otteniamo, per k=0, $\dim(W)=1$ e $\mathcal{B}_U=\{w_1\}$. Per $k\neq 0$, $\dim(W)=2$ e $\mathcal{B}_W=\{w_1,w_2\}$.

b) Riduciamo a scala la matrice che ha come colonne i vettori $\{u_i, w_j\}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 1 & 1 & k & k \\ 1 & 0 & -1 & 2k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 1 & 1 & k & k \\ 0 & 0 & -1 & 2k & 1-k^2 \\ 0 & 0 & 0 & -3k & k^2-k \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Quindi $\dim(U+W)=3$ se $3k=0$ e $k^2-k=0$, vale a dire se $k=0$ Per $k\neq 0$ invece $\dim(U+W)=4$ Nel primo caso $\mathcal{B}_{U+W}=\{u_1,u_2,w_1\}$, nel secondo come base di $U+W$ si può prendere la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

c) Per il teorema di Grassmann $\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U+W)$. Quindi $\dim(U\cap W)=0$ per $k=1$, $\dim(U\cap W)=1$ per $k\neq 1$.
Per $k=0$, $\dim(U\cap W)=\dim(W)=1$ e quindi $W=U\cap W$ e $\mathcal{B}_{U\cap W}=\mathcal{B}_W=\{w_1\}$.
Per $k\neq 0,1$, possiamo trovare una base di $U\cap W$ imponendo che un vettore $v\in U\cap W$ possa essere scritto sia come $v=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3$ che come $v=y_1w_1+y_2w_2$. Quindi $x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3-y_1w_1-y_2w_2=0$. Per risolvere questo sistema possiamo ridurre a scala la matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 & -k \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2k \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 & -k \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 1 & -2k \\ 0 & 0 & 0 & k & k^2+3k \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Dall'ultima riga della matrice ridotta a scala otteniamo la condizione

$$ky_1+k(k+3)y_2=0 \Rightarrow y_1=-(k+3)y_2 \tag{8}$$

(si noti che stiamo studiando un caso dove $k\neq 0$) e quindi una base per $U\cap W$ è data dal vettore $-(k+3)w_1+w_2$, cioè

$$\mathcal{B}_{U\cap W}=\{-(k+3)w_1+w_2=3(0,-1,k+1,0)\}. \tag{9}$$

Si noti come in questo caso lo stesso risultato possa essere ottenuto imponendo che un generico vettore di U, $v=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3$, appartenga anche a W, abbia cioè la prima e la quarta coordinata nulle. Da questo ricaviamo $x_1 = -k^2 x_3$ e $x_2 = -x_3$ e quindi i vettori di base di $U \cap W$ devono essere del tipo $x_3(0, k-1, 1-k^2, 0) = -x_3(k-1)(0, -1, k+1, 0)$. Si riottiene cioè il risultato già ricavato sopra mediante riduzione a scala.

d) Abbiamo $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ se e solo se $\dim(U+W) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$ e $\dim(U \cap W) = 0$. Entrambe le condizioni sono soddisfatte solamente per $k = 1$.

2. a) L'applicazione ϕ è lineare in quanto è lineare la derivata. La dimostrazione esplicita della linearità di ϕ è la seguente: per ogni $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_2[t]$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi(\alpha p_1 + \beta p_2) &= t\,\frac{d}{dt}(\alpha p_1 + \beta p_2) - (t+1)^2 \frac{d^2}{dt^2}(\alpha p_1 + \beta p_2) \\ &= \alpha \left[t\,\frac{dp_1}{dt} - (t+1)^2 \frac{d^2 p_1}{dt^2} \right] + \beta \left[t\,\frac{dp_2}{dt} - (t+1)^2 \frac{d^2 p_2}{dt^2} \right] \\ &= \alpha\phi(p_1) + \beta\phi(p_2). \end{aligned} \tag{10}$$

b) Per costruire la matrice M_ϕ associata a ϕ rispetto alla base $\{1, t, t^2\}$ applichiamo ϕ ai vettori di tale base:

$$\phi(1) = 0, \quad \phi(t) = t, \quad \phi(t^2) = -2 - 4t. \tag{11}$$

Quindi

$$M_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

c) Il nucleo di ϕ è costituito dai polinomi costanti, l'immagine dai polinomi di grado minore od uguale a uno. Una base dell'immagine è ad esempio costituta da $\phi(t) = t$ e $\phi(t^2) = -2 - 4t$. Quindi

$$\mathcal{B}_K = \{1\}, \quad \mathcal{B}_I\{t, -2-4t\}. \tag{13}$$

d) Siccome la matrice M_ϕ è triangolare vediamo subito che gli autovalori di ϕ sono $\lambda_1 = 0$ (con molteplicità algebrica uguale a 2) e $\lambda_2 = 1$ (con molteplicità algebrica uguale a 1). I corrispondenti autospazi hanno come base

$$\mathcal{B}_{\lambda_1} = \mathcal{B}_K = \{1\}, \quad \mathcal{B}_{\lambda_2} = \{t\}. \tag{14}$$

e) Siccome la molteplicità geometrica dell'autovalore λ_1 è uguale ad 1 e quindi minore di quella algebrica concludiamo che ϕ non è diagonalizzabile.

3. a) i) $\forall q, p \in \mathbb{R}_2[t]$,

$$\begin{aligned} g(p,q) &= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \\ &= q(-1)p(-1) + q(0)p(0) + q(1)p(1) = g(q,p); \end{aligned} \tag{15}$$

ii) $\forall p_1, p_2, q \in \mathbb{R}_2[t]$,

$$g(p_1 + p_2, q) = (p_1 + p_2)(-1)q(-1) + (p_1 + p_2)(0)q(0) + (p_1 + p_2)(1)q(1)$$

$$= [p_1(-1) + p_2(-1)]q(-1) + [p_1(0) + p_2(0)]q(0) + [p_1(1) + p_2(1)]q(1)$$
$$= p_1(-1)q(-1) + p_1(0)q(0) + p_1(1)q(1)$$
$$+p_2(-1)q(-1) + p_2(0)q(0) + p_2(1)q(1)$$
$$= g(p_1, q) + g(p_2, q); \tag{16}$$

iii) $\forall p, q \in \mathbb{R}_2[t]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$g(\alpha p, q) = (\alpha p)(-1)q(-1) + (\alpha p)(0)q(0) + (\alpha p)(1)q(1)$$
$$= \alpha(p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)) = \alpha g(p, q). \tag{17}$$

b) Per ogni $q, p \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha q + \beta p)(-t) = \alpha q(-t) + \beta p(-t) = \alpha q(t) + \beta p(t) = (\alpha q + \beta p)(t). \tag{18}$$

c) Dato un generico polinomio di grado due, $p(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, abbiamo $p(-t) = \alpha t^2 - \beta t + \gamma$ e quindi la condizione $p(t) = p(-t)$ impone $2\beta t = 0$ per ogni t reale, da cui $\beta = 0$. Concludiamo allora che $\dim(W) = 2$ e $\mathcal{B}_W = \{1, t^2\}$.

d) Consideriamo un generico vettore $q(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ e imponiamo che sia ortogonale ai vettori di base di W (l'ortogonalità a tutti i vettori di W segue quindi per la linearità del prodotto scalare):

$$g(q, 1) = (\alpha - \beta + \gamma) + \gamma + (\alpha + \beta + \gamma) = 2\alpha + 3\gamma = 0, \tag{19}$$

$$g(q, t^2) = (\alpha - \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma) = 2\alpha + 2\gamma = 0. \tag{20}$$

Le due equazioni sono entrambe soddisfatte solo quando $\alpha = \gamma = 0$. Quindi $\dim(W^\perp) = 1$ e $\mathcal{B}_{W^\perp} = \{t\}$.

e) Il prodotto scalare g è definito positivo in quanto

$$g(p, p) = [p(-1)]^2 + [p(0)]^2 + [p(1)]^2 \geq 0 \tag{21}$$

e

$$g(p, p) = 0 \Leftrightarrow p = 0. \tag{22}$$

Infatti $g(p, p) = 0$ implica $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$ ed essendo p di grado minore od uguale a due non può avere più di due radici a meno di non essere uguale al polinomio nullo. Quindi $p = 0$. Notiamo che il fatto che il prodotto scalare sia definito positivo implica $\mathbb{R}_2[t] = W \oplus W^\perp$, in accordo con i risultati dei punti c)-d).