ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 15/6/2004

1. Siano dati in uno spazio vettoriale $V$ su un corpo $K$ tre vettori linearmente indipendenti $a$, $b$ e $c$. Dimostrare che anche $a+b$, $b+c$ e $a+c$ sono linearmente indipendenti.

2. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, la risolubilità e la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare
$$\begin{cases} (5-\lambda)x - 2y - z = 1, \\ -2x + (2-\lambda)y - 2z = 2, \\ -x - 2y + (5-\lambda)z = 1. \end{cases} \tag{1}$$
Dove possibile, risolvere il sistema usando il metodo di Cramer.

3. Stabilire se è diagonalizzabile la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

4. Sia $P_n$ lo spazio vettoriale dei polinomi sul corpo $\mathbf{R}$, di grado non superiore ad $n$. Si consideri l'operatore $A : P_2 \to P_3$, definito come segue:
$$A(p) = \int_0^t p(t')dt', \quad p \in P_2. \tag{3}$$
(a) Dimostrare che l'operatore $A$ è lineare.
(b) Determinare la matrice associata all'operatore $A$ rispetto alle basi $\{1, t, t^2\}$ di $P_2$ e $\{1, t, t^2, t^3\}$ di $P_3$.
(c) Qual'è la forma di un generico vettore del nucleo di $A$ e quella di un generico vettore dell'immagine di $A$?

5. Siano $A, B : V \to V$ due applicazioni lineari tali che esistano due basi ortonormali di $V$ costituite l'una da autovettori di $A$ e l'altra da autovettori di $B$. Dimostrare che $A$ e $B$ commutano, cioé $AB = BA$, se e solo se esiste una base ortonormale di $V$ rispetto alla quale sia $A$ che $B$ sono diagonali. Per semplicità, assumere che gli autovalori di $A$ e $B$ siano non degeneri.

6. Enunciare e discutere il teorema spettrale.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 15/6/2004

1. Siano $c_1$, $c_2$ e $c_3$ tre scalari tali che
$$c_1(a+b)+c_2(b+c)+c_3(a+c)=0, \tag{4}$$
vale a dire
$$(c_1+c_3)a+(c_1+c_2)b+(c_2+c_3)c=0. \tag{5}$$
Poiché $a$, $b$ e $c$ sono linearmente indipendenti, deve essere
$$c_1+c_3=0,\quad c_1+c_2=0,\quad c_2+c_3=0, \tag{6}$$
da cui $c_1=c_2=c_3=0$. Dunque anche $a+b$, $b+c$ e $a+c$ sono linearmente indipendenti.

2. Possiamo scrivere il sistema nella forma matriciale
$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$
cioé $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, dove
$$A=\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$
Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è risolubile se e solo se rango$(A)$ = rango$(A^\star)$, dove
$$A^\star=\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$
Abbiamo $\det(A)=-\lambda(\lambda-6)^2$. Quindi, per $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 6$, rango$(A)$ = rango$(A^\star)=3$, e possiamo risolvere il sistema mediante il metodo di Cramer:
$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}}{-\lambda(\lambda-6)^2}=-\frac{1}{\lambda},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}}{-\lambda(\lambda-6)^2} = -\frac{2}{\lambda},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-\lambda(\lambda-6)^2} = -\frac{1}{\lambda}. \tag{10}$$

Per $\lambda = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Poiché due qualsiasi delle colonne di $A$ sono linearmente indipendenti abbiamo $\text{rango}(A) = 2$. Inoltre

$$\det \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0. \tag{12}$$

Ne consegue che $\text{rango}(A^\star) = 3 \neq \text{rango}(A)$. Quindi il sistema non è risolubile per $\lambda = 0$. Per $\lambda = 6$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Poiché le colonne di $A$ sono una multipla dell'altra, $\text{rango}(A) = 1$. Analogamente si ottiene $\text{rango}(A^\star) = 1$. Quindi per $\lambda = 6$ il sistema è risolubile e la dimensione dell'insieme delle soluzioni è $3 - \text{rango}(A) = 2$. Le soluzioni sono tutti gli $x$, $y$ e $z$ tali che $-x-2y-z = 1$, cioé i vettori della forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -1-x-2y \end{pmatrix}. \tag{14}$$

3. Poiché la matrice è in forma triangolare è evidente che gli autovalori sono 1 e 2, entrambi con molteplicità 2. L'autospazio relativo

all'autovalore 1 ha però dimensione $1 < 2$. Infatti per $\lambda = 1$ abbiamo $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, da cui

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Quindi l'autospazio relativo all'autovalore 1 comprende i vettori del tipo $(x_1, 0, 0, 0)$. Poiché la dimensione di questo autospazio è minore della molteplicità del corrispondente autovalore, $A$ non è diagonalizzabile.

4. (a) Dati due polinomi $p_1, p_2 \in P_2$, abbiamo

$$A(p_1 + p_2) = \int_0^t [p_1(t') + p_2(t')]dt' =$$

$$\int_0^t p_1(t')dt' + \int_0^t p_2(t')dt' = A(p_1) + A(p_2); \tag{16}$$

inoltre, per ogni $p \in P_2$ e per ogni $c \in \mathbf{R}$, abbiamo

$$A(cp) = \int_0^t cp(t')dt' = c\int_0^t p(t')dt' = cA(p). \tag{17}$$

(b) Abbiamo

$$\begin{aligned} A(1) &= \int_0^t dt' = t, \\ A(t) &= \int_0^t t'dt' = \frac{t^2}{2}, \\ A(t^2) &= \int_0^t (t')^2 dt' = \frac{t^3}{3}, \end{aligned} \tag{18}$$

da cui otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

(c) Dato un generico vettore $p = a + bt + ct^2 \in P_2$, abbiamo

$$A(a + bt + ct^2) = aA(1) + bA(t) + cA(t^2) = at + \frac{b}{2}t^2 + \frac{c}{3}t^3. \tag{20}$$

Quindi $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ e $\dim[\mathrm{Im}(A)] = 3$. Una base per $\mathrm{Im}(A)$ è costituita dai vettori $\{t, t^2, t^3\}$.

5. Supponiamo che $\{v_i\}$ sia una base ortonormale sia per $A$ che per $B$, cioé

$$Av_i = a_i v_i, \quad Bv_i = b_i v_i. \tag{21}$$

Abbiamo

$$ABv_i = Ab_i v_i = b_i Av_i = b_i a_i v_i = a_i b_i v_i = a_i Bv_i = Ba_i v_i = BAv_i, \tag{22}$$

e quindi $A$ e $B$ commutano. Dimostriamo ora il contrario. Assumiamo che $AB = BA$ e consideriamo una base ortonormale $\{v_i\}$ per $A$. Sviluppiamo $Bv_i$ sulla base $\{v_i\}$:

$$Bv_i = \sum_j (Bv_i)_j v_j. \tag{23}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} 0 = [A, B]v_i = ABv_i - BAv_i &= \sum_j (Bv_i)_j a_j v_j - a_i \sum_j (Bv_i)_j v_j \\ &= \sum_j (Bv_i)_j (a_i - a_j) v_j. \end{aligned} \tag{24}$$

Poiché abbiamo assunto che gli autovalori di $A$ siano non degeneri ($a_i \neq a_j$ quando $i \neq j$), otteniamo $(Bv_i)_j = 0$ per $i \neq j$. Definendo $(Bv_i)_i = \beta_i$, abbiamo $(Bv_i)_j = \beta_i \delta_{ij}$. Inserendo questa relazione in (23) otteniamo

$$Bv_i = \beta_i v_i. \tag{25}$$

Quindi $v_i$ è anche autovettore di $B$, con autovalore $\beta_i$.