ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 15/7/2010

1. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi vettoriali:

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{Span}(u_1 = (1,0,-1,-1), u_2 = (1,1,1,0)), \\ W &= \{(x,y,z,t) \mid x-2y-z=0,\ y+t=0,\ x,y,z,t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Determinare la dimensione e una base di $U+W$.
b) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.
c) Si dica se $\mathbb{R}^4 = U + W$.
d) Si dica se ogni vettore di $U+W$ si scompone in modo unico nella somma di un vettore di U e di uno di W.
e) Trovare il complemento ortogonale $U^\perp$ di U rispetto al prodotto scalare ordinario in $\mathbb{R}^4$.

2. Si consideri l'applicazione $F : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, definita da

$$F(A) = AB - 2A, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

a) Dimostrare che F è lineare.
b) Calcolare la matrice associata ad F rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{3}$$

c) Determinare la dimensione e una base del nucleo di F.
d) Determinare la dimensione e una base dell'immagine di F.
e) Determinare autovalori ed autospazi di F. Dire se F è diagonalizzabile.

3. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 5y + 3z = k, \\ (k-2)x + kz = -k, \\ -x + kz = -k. \end{cases} \tag{4}$$

Si dica per quali valori di k il sistema è risolubile e, nel caso in cui lo sia, si trovi la dimensione dell'insieme delle soluzioni e si risolva il sistema.

4. Una matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ si dice nilpotente se esiste un intero positivo k tale che $A^k = 0$. Il minimo intero k tale che $A^k = 0$ si dice indice di nilpotenza.
   a) Dimostrare che A è nilpotente se e solo se ammette come unico autovalore 0 con molteplicità algebrica n.
   b) Dimostrare che se A è nilpotente, allora l'indice di nilpotenza è sempre minore od uguale a n.
   c) Dimostrare che l'unica matrice nilpotente diagonalizzabile è la matrice nulla.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 15/7/2010

1. a) I vettori di W sono della forma $(x, y, x-2y, -y)$. Una base di W è quindi costituita dai vettori $w_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $w_2 = (0, 1, -2, -1)$. Scriviamo ora la matrice che ha come colonne u_1, u_2, w_1, w_2 e riduciamola a scala:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Quindi $U + W$ ha dimensione 3 e una base di $U + W$ è costituita dai vettori u_1, u_2, w_1.

b) Abbiamo $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 1$. Un vettore v di $U \cap W$ deve potersi scrivere come $v = xu_1 + yu_2 = zw_1 + tw_2$. Quindi $xu_1 + yu_2 - zw_1 - tw_2 = 0$ e la risoluzione di questo sistema impone $z = 2t$. Possiamo allora concludere che una base di $U \cap W$ è data da

$$\mathcal{B}_{U\cap W} = \{2w_1 + w_2 = (2, 1, 0, -1)\}. \tag{6}$$

c) No, in quanto $\dim(U + W) = 3 < \dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

d) No, in quanto $U \cap W$ non contiene solamente il vettore nullo.

e) Imponendo l'ortogonalità di un generico vettore di $\mathbb{R}^4$ a u_1 e u_2 otteniamo le condizioni

$$\begin{cases} x - z - t = 0, \\ x + y + z = 0, \end{cases} \tag{7}$$

e quindi i vettori di $U^\perp$ sono della forma $(x, y, -x-y, 2x+y)$. Ne consegue che $U^\perp$ ha dimensione 2. Come base possiamo scegliere

$$\mathcal{B}_{U^\perp} = \{(1, 0, -1, 2), (0, 1, -1, 1)\}. \tag{8}$$

2. a) Prima di tutto possiamo scrivere $F(A) = A(B - 2I) = AC$, dove abbiamo definito $C = B - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Abbiamo

$$F(\alpha A_1 + \beta A_2) = (\alpha A_1 + \beta A_2)C = \alpha A_1 C + \beta A_2 C = \alpha F(A_1) + \beta F(A_2). \tag{9}$$

b)

$$F\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Quindi la matrice associata ad F è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

c)-d) $\dim[\mathrm{Ker}(F)] = \dim[\mathrm{Im}(F)] = 2$,

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(F)} = \mathcal{B}_{\mathrm{Im}(F)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{12}$$

e) L'unico autovalore è $\lambda = 0$, con molteplicità algebrica uguale a 4 e molteplicità geometrica uguale a 2 (l'autospazio è il nucleo di F). Essendo le due molteplicità differenti l'applicazione non è diagonalizzabile.

3. Chiamiamo A la matrice dei coefficienti del sistema e $A^\star$ la matrice completa dei termini noti. Siccome $\det(A) = -5k(k-1)$, per $k \neq 0, 1$ $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^\star) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione:

$$x = 0, \quad y = \frac{k+3}{5}, \quad z = -1. \tag{13}$$

Per $k = 0$, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^\star) = 2$ e quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni V_0 è uguale ad 1: $V_0 = \{(0, y, -\frac{5}{3}y),\ y \in \mathbb{R}\}$.

Per $k = 1$, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^\star) = 2$ e quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni V_1 è uguale ad 1: $V_1 = \{(z+1, -\frac{4}{5}z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$.

4. a) Supponiamo prima che A sia nilpotente di indice k. Allora $A^k = 0$ e, dato un qualunque autovalore λ di A, $Av_\lambda = \lambda v_\lambda$ con $v_\lambda \neq 0$, ne consegue che

$$A^k v_k = 0 v_k = 0 = \lambda^k v_k. \tag{14}$$

Quindi l'unico autovalore è $\lambda = 0$ e la sua molteplicità algebrica deve essere uguale ad n.

Se viceversa assumiamo che l'unico autovalore sia lo zero con molteplicità algebrica n, ne consegue che il polinomio caratteristico della matrice è

$$p_A(\lambda) = \lambda^n, \tag{15}$$

e quindi per il teorema di Hamilton-Cayley la matrice A soddisfa $A^n = 0$. Ne concludiamo che A è nilpotente con indice di nilpotenza $\leq n$.

b) Segue dalla risoluzione del punto precedente.

c) Se A è diagonalizzabile, allora il suo unico autovalore $\lambda = 0$ deve essere regolare, e quindi avere molteplicità geometrica uguale a quella algebrica, cioé ad n. La dimensione dell'autospazio corrispondente all'autovalore nullo, cioé del nucleo di A, è allora n. Ciò implica che la matrice A abbia rango 0, quindi $A = 0$.