ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 15/9/2006

1. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi sul corpo $\mathbf{R}$, di grado minore od uguale a 3. Si consideri il sottospazio W generato dai polinomi

$$v_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \quad v_2 = t^3 + 6t - 5,$$

$$v_3 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1, \quad v_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5. \tag{1}$$

Trovare la dimensione e una base di W.

2. a) Determinare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, la risolubilità del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 3y + az = 3, \\ x + ay + 3z = 2. \end{cases} \tag{2}$$

b) Determinare le soluzioni del sistema per ogni a per cui il sistema è compatibile.

3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 12 \\ 0 & 13 & -30 \\ 0 & 9 & -20 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

a) Calcolare gli autovalori di A ed una base per ogni autospazio.
b) La matrice è diagonalizzabile? In caso affermativo, trovare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tale che $P^{-1}AP = D$.

4. a) Dare la definizione di prodotto scalare.
b) Dimostrare che nello spazio vettoriale V delle funzioni continue definite nell'intervallo $[0, 1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in V, \tag{4}$$

è un prodotto scalare.
c) Dato il sottospazio W generato dalle funzioni $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = x^2$, trovare una base ortonormale di tale sottospazio.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 15/9/2006

1. Scriviamo la matrice M che ha per righe i vettori delle coordinate dei polinomi assegnati rispetto alla base $\{t^3, t^2, t, 1\}$ di V:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Conviene ridurre per righe tale matrice, ottenendo

$$M \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Le due righe non nulle della matrice a gradini formano una base dello spazio generato dai vettori delle coordinate associati a v_1, v_2, v_3, v_4. Quindi W ha dimensione 2 e i due polinomi $t^3 - 2t^2 + 4t + 1$ e $t^2 + t - 3$ costituiscono una base per W.

2. Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema completo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & (a+3)(-a+2) & -a+2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Si può ora vedere che la matrice del sistema omogeneo associato (ottenuta eliminando l'ultima colonna dalla matrice completa) ha rango massimo (uguale a 3) per $a \neq 2, -3$. Ne consegue che per $a \neq 2, -3$ il sistema ha un'unica soluzione, $x = 1, y = z = \frac{1}{a+3}$. Per $a = -3$ il sistema completo ha rango 3, quello omogeneo associato 2, per cui il sistema è incompatibile. Per $a = 2$ sia il sistema completo che quello omogeneo associato hanno rango 2, per cui lo spazio delle soluzioni è una retta in $\mathbf{R}^3$: $x + y - z = 1$, $y + 4z = 1$.

3. a) Il polinomio caratteristico di A è $p(\lambda) = (\lambda+5)(\lambda+2)(\lambda-1)$. Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 1$, tutti con molteplicità algebrica 1. I corrispondenti autospazi sono

$$V_1 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbf{R} \right\},$$

$$V_3 = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbf{R} \right\}. \tag{8}$$

b) Siccome per tutti gli autovalori la molteplicità algebrica è uguale a quella geometrica, ne consegue che la matrice è diagonalizzabile. La matrice P ha come colonne gli autovettori di A mentre D è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori di A:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

4. b) Data una coppia di vettori f e g, $\langle f, g\rangle$ associa a tale coppia uno scalare. Valgono le proprietà del prodotto scalare:
(i) Per ogni $f, g \in V$, abbiamo

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx = \langle g, f\rangle, \tag{10}$$

(ii) Dati $f, g, h \in V$, allora

$$\langle f, g+h\rangle = \int_0^1 f(x)[g(x)+h(x)]dx$$

$$= \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f(x)h(x)dx = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle. \tag{11}$$

(iii) Per ogni $f, g \in V$ e per ogni $c \in \mathbf{R}$, abbiamo

$$\langle cf, g\rangle = \int_0^1 [cf(x)]g(x)dx = c\int_0^1 f(x)g(x)dx = c\langle f, g\rangle. \tag{12}$$

c) Applicando il metodo di Gram-Schmidt, otteniamo la base ortogonale $\{g_1, g_2\}$, a partire da $\{f_1, f_2\}$. Abbiamo

$$g_1 = f_1 = x, \quad g_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, g_1 \rangle}{\langle g_1, g_1 \rangle} g_1 = x^2 - \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} x = x^2 - \frac{3}{4} x. \tag{13}$$

Possiamo poi passare ad una base ortonormale $\{h_1, h_2\}$:

$$h_1 = \frac{g_1}{||g_1||} = \frac{x}{\sqrt{\int_0^1 x^2 dx}} = \sqrt{3} x,$$

$$h_2 = \frac{g_2}{||g_2||} = \frac{x^2 - \frac{3}{4} x}{\sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{4} x \right)^2 dx}} = \sqrt{80} \left(x^2 - \frac{3}{4} x \right). \tag{14}$$