ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 15/9/2009

1. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche di ordine due.
a) Verificare che le matrici
$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$
costituiscono una base per V.
b) Si consideri l'applicazione lineare $L : V \to V$, definita da
$$L \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{2}$$
Determinare autovalori ed autospazi di L. L è diagonalizzabile?

2. Risolvere il sistema
$$\begin{cases} \lambda x - y + z = 0, \\ \lambda y + z = 0, \\ x - y + z = 0 \end{cases} \tag{3}$$
e in particolare discutere la dimensione dello spazio delle soluzioni al variare di λ in $\mathbf{R}$.

3. Sia $\mathbf{R}_3[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a tre e sia $A : \mathbf{R}_3[t] \to \mathbf{R}_3[t]$ l'applicazione lineare definita da $[A(p)](t) = t^2 p''(t+1)$, dove i due apici indicano la derivata seconda rispetto a t.
a) Trovare dimensione e base di nucleo ed immagine dell'applicazione lineare. L'applicazione lineare è iniettiva? Suriettiva? Invertibile?
b) Trovare autovalori ed autospazi dell'applicazione lineare. A è diagonalizzabile?

4. Dati due qualsiasi vettori $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbf{R}^3$, il prodotto vettore di v e w è definito come
$$v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1). \tag{4}$$
a) Dimostrare che l'applicazione $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $S(v) = v \times w$, è lineare.
a) Trovare dimensione e base di nucleo ed immagine di S. L'applicazione lineare è iniettiva? Suriettiva? Invertibile?

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 15/9/2009

1. a) Le matrici E_1, E_2, E_3 generano V in quanto, per una generica matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ in V possiamo scrivere $M = aE_1 + bE_2 + cE_3$. Inoltre le tre matrici sono linearmente indipendenti in quanto $aE_1+bE_2+cE_3 = 0$ implica $a = b = c = 0$.

   b) Abbiamo $L(E_1) = E_3$, $L(E_2) = E_2$, $L(E_3) = E_1$, quindi la matrice associata ad L rispetto alla base $\{E_1, E_2, E_3\}$ è

$$M_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

   La matrice è diagonalizzabile in quanto simmetrica. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ (con molteplicità algebrica 2) e $\lambda_2 = -1$ (con molteplicità algebrica 1). I corrispondenti autospazi sono dati da

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R} \right\}, \tag{6}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{R} \right\}. \tag{7}$$

2. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

   Siccome $\det(A) = \lambda^2 - 1$, il sistema per $\lambda \neq \pm 1$ ammette l'unica soluzione banale $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
   Per $\lambda = 1$, $\mathrm{rg}(A) = 2$ e quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1. Le soluzioni sono date da $(x, y, z) = a(-2, -1, 1)$, $a \in \mathbf{R}$.
   Per $\lambda = -1$, $\mathrm{rg}(A) = 2$ e quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1. Le soluzioni sono date da $(x, y, z) = a(0, 1, 1)$, $a \in \mathbf{R}$.

3. a) Consideriamo la base canonica $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$. Siccome $A(1) = 0$, $A(t) = 0$, $A(t^2) = 2t^2$, $A(t^3) = 6(t^3 + t^2)$, la matrice associata ad A rispetto alla base $\mathcal{B}$ è data da

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Sia il nucleo che l'immagine di A hanno dimensione 2. Basi del nucleo e dell'immagine sono date da $\mathcal{B}_K = \{1, t\}$, $\mathcal{B}_I = \{t^2, t^2 + t^3\}$.
L'applicazione lineare non è né iniettiva né suriettiva e quindi neppure invertibile.

b) L'applicazione lineare ha come autovalori $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$ e come corrispondenti autospazi il nucleo di A, $V_1 = \{at^2,\ a \in \mathbf{R}\}$, $V_2 = \{a(3t^2 + 2t^3),\ a \in \mathbf{R}\}$. Siccome le molteplicità algebriche coincidono con quelle geometriche e la somma delle molteplicità è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale, l'applicazione è diagonalizzabile.

4. a) Dati $v = (v_1, v_2, v_3)$, $v' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ e $c \in \mathbf{R}$, si dimostra facilmente che $S(cv) = cS(v)$ e $S(v + v') = S(v) + S(v')$.
b) Data la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$, risulta $S(e_1) = (0, -w_3, w_2)$, $S(e_2) = (w_3, 0, -w_1)$, $S(e_3) = (-w_2, w_1, 0)$. Quindi la matrice associata all'applicazione lineare è

$$M_S = \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Siccome $\det(M_S) = 0$, l'applicazione lineare non è invertibile. Se $w \neq 0$, la matrice M_S ha rango 2, quindi il nucleo ha dimensione 1 e l'immagine dimensione 2. Se invece $w = 0$ abbiamo il caso banale dell'applicazione nulla, che ha come nucleo tutto $\mathbf{R}^3$ e come immagine solo il vettore nullo. In ogni caso l'applicazione non è né iniettiva né suriettiva.

Nel caso non banale, conviene scegliere gli assi in modo tale che $w = (l, 0, 0)$. In questo caso la matrice M_S diventa semplicemente

$$M_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l \\ 0 & -l & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Quindi il nucleo è l'asse x (comprende i vettori diretti come w) mentre l'immagine è il piano yz (vettori ortogonali a w).