ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 16/9/2011

1. Sia $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×2 su $\mathbb{R}$ e U il sottospazio di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ generato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Determinare la dimensione e una base di U.
b) Si consideri la matrice $D = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3k+1 & k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Stabilire per quali valori di k tale matrice appartiene ad U.

2. Sia $\mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a due. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$, definita da

$$f(at^2 + bt + c) = (a-b)t^2 + (b-c)t + a - c. \tag{2}$$

a) Dimostrare che f è lineare.
b) Calcolare una base per il nucleo e una base per l'immagine di f.
c) Discutere la diagonalizzabilità di f.

3. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e si definisca

$$\langle X, X' \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle = xx' + 4yy' + 2xy' + 2yx' \tag{3}$$

per ogni $X, X' \in \mathbb{R}^2$.
a) Dimostrare che effettivamente si tratta di un prodotto scalare.
b) Dire se il prodotto scalare è definito positivo.
c) Dire se il prodotto scalare è non degenere.
d) Trovare una base di $\mathbb{R}^2$ ortogonale rispetto a questo prodotto scalare.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 16/9/2011

1. a) Per determinare la dimensione e una base di U bisogna stabilire quante e quali tra le matrici A, B e C sono linearmente indipendenti. A tal fine risolviamo il sistema $xA + yB + zC = 0$, vale a dire

$$\begin{cases} 3x + 3z = 0, \\ x + y + 5z = 0, \\ 3x + y + 7z = 0, \\ x + z = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Riduciamo a scala la matrice associata al sistema:

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|. \tag{5}$$

Il sottospazio generato da A, B e C ha quindi dimensione 2 e una base di U è $\mathcal{B}_U = \{A, B\}$.

b) Per esprimere D come combinazione lineare della base trovata dobbiamo risolvere l'equazione $xA + yB = D$, vale a dire

$$\begin{cases} 3x = 9, \\ x + y = 4, \\ 3x + y = 3k + 1, \\ x = k. \end{cases} \tag{6}$$

Riducendo a scala la matrice associata al sistema, con l'aggiunta dei termini noti nell'ultima colonna, otteniamo

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3k+1 \\ 1 & 0 & k \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3k-8 \\ 0 & 0 & 3k-9 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9k-27 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|. \tag{7}$$

Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è risolubile se e solo se $9k - 27 = 0$, vale a dire $k = 3$. Quindi solamente per $k = 3$ la matrice D appartiene al sottospazio U.

2. a) Dati due polinomi, $p_1(t) = a_1t^2 + b_1t + c_1$ e $p_2(t) = a_2t^2 + b_2t + c_2$, e due scalari $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$f(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) = f[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)t^2 + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)t + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2]$$

$$= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 - \alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2)t^2 + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 - \alpha_1 c_1 - \alpha_2 c_2)t + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 - \alpha_1 c_1 - \alpha_2 c_2$$

$$= \alpha_1[(a_1 - b_1)]t^2 + (b_1 - c_1)t + a_1 - c_1] + \alpha_2[(a_2 - b_2)]t^2 + (b_2 - c_2)t + a_2 - c_2]$$

$$= \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2). \tag{8}$$

b) Costruiamo la matrice M_f associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{e_1 = t^2, e_2 = t, e_3 = 1\}$. Abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} f(e_1) = f(t^2) = t^2 + 1 = e_1 + e_3, \\ f(e_2) = f(t) = -t^2 + t = -e_1 + e_2, \\ f(e_3) = f(1) = -t - 1 = -e_2 - e_3. \end{array} \right. \tag{9}$$

Quindi

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Riducendo a scala questa matrice otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Quindi l'immagine di f ha dimensione 2 e una base per $\mathrm{Im}(f)$ corrisponde alle prime due colonne di M_f:

$$\mathcal{B}_I = \{t^2 + 1, -t^2 + t\}. \tag{12}$$

Dalla matrice ridotta a scala otteniamo il nucleo risolvendo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y = 0, \\ y - z = 0, \end{array} \right. \tag{13}$$

che ha come soluzione $x = y = z$. Quindi una base per l'immagine è

$$\mathcal{B}_K = \{t^2 + t + 1\}. \tag{14}$$

c) Il polinomio caratteristico

$$p_\lambda = \det(\lambda I - M_f) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda \tag{15}$$

ha come radici

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \tag{16}$$

Siccome gli autovalori hanno tutti molteplicità algebrica uguale ad uno e la loro somma è uguale al numero di righe (e di colonne) della matrice M_f, l'applicazione lineare f è diagonalizzabile.

3. a) Abbiamo

$$\langle X', X \rangle = x'x + 4y'y + 2x'y + 2y'x = \langle X, X' \rangle. \tag{17}$$

Allo stesso modo si verifica per calcolo diretto che $\langle X, X' + X'' \rangle = \langle X, X' \rangle + \langle X, X'' \rangle$ e che $\langle X, cX' \rangle = c\langle X, X' \rangle$.
b) $\langle X, X \rangle = x^2 + 4y^2 + 4xy = (x + 2y)^2$. Quindi possiamo avere $\langle X, X \rangle = 0$ anche con $X \neq 0$, ad esempio con $x = 2, y = -1$. Concludiamo allora che il prodotto

scalare non è definito positivo.
c)-d) La matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica è data da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Questa matrice ha come autovalori $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 5$. Siccome è presente l'autovalore nullo il prodotto scalare è degenere. Una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ è formata dagli autovettori di M:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \right\}. \tag{19}$$