ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 17/9/2007

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbf{R}$ è diagonalizzabile la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

2. Sia data l'applicazione $g : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, definita da

$$g(A, B) = \mathrm{Tr}({}^t BPA), \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

   a) Dimostrare che tale applicazione è un prodotto scalare.
   b) Dimostare che tale prodotto scalare è definito positivo.

3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

   si consideri l'applicazione $T : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, definita, per ogni $X \in \mathcal{M}_{2,2}$, da $T(X) = AX - XA$.
   a) Dimostrare che T è lineare.
   b) Determinare $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
   c) Dimostrare che $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

4. a) Dire quando due matrici quadrate A e B sono simili.
   b) Dimostrare che, se A e B sono matrici simili, lo sono anche A^3 e B^3. Generalizzare il risultato.
   c) Dimostrare che, se A e B sono simili e B è invertibile, allora AB e BA sono simili.

5. a) Una matrice A è detta idempotente se $A^2 = A$. Dimostrare che i soli possibili autovalori di una matrice idempotente sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.
   b) Dare un esempio di matrice idempotente che possieda entrambi gli autovalori $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 17/9/2007

1. Il polinomio caratteristico è $p_M(\lambda) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-a)$. Quindi, per $a \neq 0,2$ i tre autovalori $\lambda = 0$, $\lambda = 2$ e $\lambda = a$ sono distinti, per cui la matrice risulta diagonalizzabile.
Per $a = 0$ l'autovalore $\lambda = 0$ ha molteplicità algebrica 2, mentre la molteplicità geometrica vale 1 per $b \neq 0$ e 2 per $b = 0$. Quindi la matrice è diagonalizzabile per $a = b = 0$ e non diagonalizzabile per $a = 0$, $b \neq 0$.
Per $a = 2$ l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica 2, mentre la molteplicità geometrica vale 1 per $b \neq 0$ e 2 per $b = 0$. Quindi la matrice è diagonalizzabile per $a = 2$, $b = 0$ e non diagonalizzabile per $a = 2$, $b \neq 0$.

2. a) Per ogni $A, B, C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ e $c \in \mathbf{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} g(B,A) &= \mathrm{Tr}({}^tAPB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAPB)) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tB{}^tP{}^t({}^tA)) = \mathrm{Tr}({}^tBPA) = g(A,B), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} g(A,B+C) &= \mathrm{Tr}({}^t(B+C)PA) = \mathrm{Tr}(({}^tB+{}^tC)PA) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tBPA+{}^tCPA) = \mathrm{Tr}({}^tBPA)+\mathrm{Tr}({}^tCPA) = g(A,B)+g(A,C), \end{aligned} \tag{5}$$

$$g(cA,B) = \mathrm{Tr}({}^tBP(cA)) = c\mathrm{Tr}({}^tBPA) = cg(A,B). \tag{6}$$

b) Costruiamo una base ortogonale secondo il prodotto scalare g e la usiamo per verificare che l'indice di positività sia massimo, cioé che il prodotto scalare sia definito positivo. Con il metodo di Gram-Schmidt, partendo dalla base

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \tag{7}$$

otteniamo la base ortogonale $\mathcal{B}' = \{E_1', E_2', E_3', E_4'\}$, con

$$\begin{cases} E_1' = E_1, \\ E_2' = E_2 - \frac{g(E_2,E_1')}{g(E_1',E_1')}E_1' = E_2, \\ E_3' = E_3 - \frac{g(E_3,E_1')}{g(E_1',E_1')}E_1' - \frac{g(E_3,E_2')}{g(E_2',E_2')}E_2' = E_3 - E_1, \\ E_4' = E_4 - \frac{g(E_4,E_1')}{g(E_1',E_1')}E_1' - \frac{g(E_4,E_2')}{g(E_2',E_2')}E_2' - \frac{g(E_4,E_3')}{g(E_3',E_3')}E_3' = E_4 - E_2. \end{cases} \tag{8}$$

Siccome $g(E'_i, E'_i) = 1 > 0$ per $i = 1, ..., 4$, il prodotto scalare è definito positivo.

3. a) Per ogni $X, Y \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ e per ogni $c \in \mathbf{R}$, abbiamo

$$\begin{aligned} T(X+Y) &= A(X+Y) - (X+Y)A = AX + AY - XA - YA \\ &= AX - XA + AY - YA = T(X) + T(Y), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} T(cX) &= A(cX) - (cX)A = c(AX) - c(XA) \\ &= c(AX - XA) = cT(X). \end{aligned} \tag{10}$$

b) Data una generica matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, otteniamo

$$AX - XA = \begin{pmatrix} c-b & b+d-a \\ a-c-d & b-c \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Quindi $X \in \mathrm{Ker}(T)$ se e solo se

$$\begin{cases} c - b = 0, \\ b + d - a = 0, \\ a - c - d = 0, \\ b - c = 0, \end{cases} \tag{12}$$

cioé se X è della forma

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Quindi $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$ e una base per il nucleo è

$$\mathcal{B}_K = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{14}$$

Abbiamo poi $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})) - \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 4 - 2 = 2$. Una base per l'immagine è data da

$$\mathcal{B}_I = \left\{ E_3 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{15}$$

c) I 4 vettori E_1, E_2, E_3, E_4 sono linearmente indipendenti (per vederlo basta calcolare il determinante della matrice che ha come colonne tali vettori e vedere che è diverso da 0) e quindi costituiscono una base per $\mathcal{B}_{2,2}(\mathbf{R})$, che perciò è somma diretta del nucleo e dell'immagine di T.

4. b) Poiché A e B sono simili, esiste S tale che $A = S^{-1}BS$. Allora $A^3 = (S^{-1}BS)^3 = (S^{-1}BS)(S^{-1}BS)(S^{-1}BS) = S^{-1}B(SS^{-1})B(SS^{-1})BS = S^{-1}B^3S$. In generale, A^n è simile a B^n, con n intero non negativo.
c) Basta osservare che $B^{-1}(BA)B = (B^{-1}B)(AB) = AB$

5. a) Supponiamo che λ sia autovalore di A. Allora esiste un autovettore x tale che $Ax = \lambda x$. Siccome A è per ipotesi idempotente,

$$Ax = A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda^2 x. \tag{16}$$

Abbiamo quindi $\lambda x = \lambda^2 x$, da cui $(\lambda^2 - \lambda)x = 0$. Siccome x è un autovettore, e quindi diverso dal vettore nullo, concludiamo che $\lambda^2 - \lambda = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.
b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è idempotente e ha come autovalori $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.