ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 18/2/2013

1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + ky + (k-1)z = k, \\ (3-k)x + 2y + z = 3, \\ x + ky + z = k + 1. \end{cases} \tag{1}$$

a) Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema.
b) Quando il sistema è risolubile trovarne le soluzioni.
c) Interpretando ogni equazione del sistema come quella di un piano in uno spazio tridimensionale, discutere la posizione mutua dei piani al variare di $k \in \mathbb{R}$.

2. Si consideri l'applicazione $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$, definita da

$$[T(p)](t) = p(t+1) - p(t-1). \tag{2}$$

a) Dimostrare che l'applicazione T è lineare.
b) Costruire la matrice associata a T rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2, p_3(t) = t^3\right\}. \tag{3}$$

c) Trovare una base per il nucleo ed una base per l'immagine di T.
d) T è iniettiva? È suriettiva? È invertibile?
e) Determinare autovalori ed autospazi di T.
f) T è diagonalizzabile?

3. Sia data l'applicazione $g : \mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$, definita da

$$g(p, q) = p(0)q(0) - p(1)q(1) + p(2)q(2). \tag{4}$$

a) Dimostrare che g è un prodotto scalare.
b) Scrivere la matrice associata a tale prodotto scalare rispetto alla base $\mathcal{B} = \{p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2\}$.
c) Il prodotto scalare g è definito positivo?
d) Il prodotto scalare g è non degenere?
e) Calcolare indici di positività e nullità del prodotto scalare g.
f) Determinare una base del complemento ortogonale (rispetto al prodotto scalare g) del sottospazio

$$U = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] \mid p(0) = 0\}. \tag{5}$$

g) Determinare se $\mathbb{R}_2[t] = U \oplus U^\perp$ e se $\mathbb{R}_2[t] = U + U^\perp$.

1. a-b) Riducendo a scala la matrice $A^\star$ dei coefficienti del sistema completo otteniamo

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & k & k-1 & k \\ 3-k & 2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 1 & k+1 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & k & k-1 & k \\ 0 & 2-3k+k^2 & k^2-4k+4 & 3-3k+k^2 \\ 0 & 0 & 2-k & 1 \end{array}\right|. \quad (6)$$

Per $k^2-3k+2 \neq 0$, vale a dire per $k \neq 1$ e $k \neq 2$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 3$ (con A matrice dei coefficienti del sistema omogeneo associato), per cui il sistema ammette un'unica soluzione, che si determina facilmente dalla matrice ridotta sopra a forma triangolare superiore:

$$x = \frac{1}{2-k}, \quad y = \frac{1-k}{2-k}, \quad z = x = \frac{1}{2-k}. \quad (7)$$

Per $k=2$, riducendo a scala la matrice $A^\star$ otteniamo

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|, \quad (8)$$

per cui $\mathrm{rg}(A) = 1 < \mathrm{rg}(A^\star) = 2$ e quindi il sistema non è risolubile.

Per $k=1$, riducendo a scala la matrice $A^\star$ otteniamo

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|, \quad (9)$$

per cui $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 2$ e quindi il sistema è risolubile, con dimensione dell'insieme delle soluzioni uguale ad uno:

$$z = 1, \quad x + y = 1. \quad (10)$$

c) Per $k \neq 1$ e $k \neq 2$, i tre piani si intersecano in un unico punto, che è la soluzione del sistema. Per $k=2$, i tre piani $\pi_1 : x+2y+z=2$, $\pi_2 : x+2y+z=3$, $\pi_3 : x+2y+z=3$ sono tali che π_2 e π_3 sono coincidenti, mentre π_1 e π_2 sono paralleli e distinti. Per $k=1$ i tre piani hanno in comune una retta (soluzione del sistema).

2. a)

$$\begin{aligned} [T(\alpha p + \beta q)](t) &= (\alpha p + \beta q)(t+1) - (\alpha p + \beta q)(t-1) \\ &= \alpha p(t+1) + \beta q(t+1) - [\alpha p(t-1) + \beta q(t-1)] \\ \alpha[p(t+1) - p(t-1)] + \beta[q(t+1) - q(t-1)] &= \alpha[T(p)](t) + \beta[T(q)](t). \quad (11) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} T(p_0) &= 0, & (12) \\ T(p_1) &= 2p_0, & (13) \\ T(p_2) &= 4p_1, & (14) \\ T(p_3) &= -6p_2 + 2p_0. & (15) \end{aligned}$$

La matrice associata a T rispetto alla base assegnata è quindi data da

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

c) Risolvendo il sistema $MX = 0$, con ${}^tX = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, otteniamo come soluzione $y = z = t = 0$. Quindi $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$ e come base del nucleo possiamo prendere $\mathcal{B}_K = \{1\}$. Quindi $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}_3[t]) - \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 4 - 1 = 3$ e una base dell'immagine è data dai polinomi corrispondenti alle ultime tre colonne della matrice M: $\mathcal{B}_I = \{2, 4t, 2 + 6t^2\}$.

d) Siccome $\dim(\mathrm{Ker}(T)) > 0$, T non è iniettiva. Siccome $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 < \dim(\mathbb{R}_3[t])$, T non è neppure suriettiva. Concludiamo che T non è neppure invertibile.

e) Il polinomio caratteristico di M è $p_M(\lambda) = \lambda^4$. Quindi l'unico autovalore è $\lambda_1 = 0$, con molteplicità algebrica $\mu_1 = 4$. Il corrispondente autospazio V_1 coincide con il nucleo di T determinato precedentemente. Quindi la molteplicità geometrica di λ_1, data dalla dimensione di V_1, vale $\nu_1 = 1$.

f) Siccome $\nu_1 < \mu_1$, T non è diagonalizzabile.

3. a) i)

$$g(q,p) = q(0)p(0) - q(1)p(1) + q(2)p(2) = p(0)q(0) - p(1)q(1) + p(2)q(2) = g(p,q). \tag{17}$$

ii)

$$\begin{aligned} g(p, q+r) &= p(0)(q+r)(0) - p(1)(q+r)(1) + p(2)(q+r)(2) \\ &= p(0)[q(0)+r(0)] - p(1)[q(1)+r(1)] + p(2)[q(2)+r(2)] \\ &= p(0)q(0) - p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(0)r(0) - p(1)r(1) + p(2)r(2) = g(p,q) + g(p,r). \end{aligned} \tag{18}$$

iii)

$$\begin{aligned} g(p, kq) &= p(0)(kq)(0) - p(1)(kq)(1) + p(2)(kq)(2) \\ &= k[p(0)q(0) - p(1)q(1) + p(2)q(2)] = kg(p,q). \end{aligned} \tag{19}$$

b) Gli elementi c_{ij} della matrice C associata al prodotto scalare sono per definizione dati da $c_{ij} = g(p_i, p_j)$. Otteniamo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 15 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

c) Il prodotto scalare non è definito positivo in quanto, per esempio, se $p(t) = t(t-2)$, vale a dire che p è un polinomio che si annulla in $t = 0$ e $t = 2$ ma non in $t = 1$, allora $g(p,p) = -1 < 0$.

d) Consideriamo un generico polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{R}_2[t]$ e imponiamo l'ortogonalità di p ai vettori della base $\mathcal{B}$. Otteniamo

$$g(p, p_0) = 0 \Rightarrow a_0 - (a_0 + a_1 + a_2) + (a_0 + 2a_1 + 4a_2) = 0, \tag{21}$$

$$g(p, p_1) = 0 \Rightarrow -(a_0 + a_1 + a_2) + 2(a_0 + 2a_1 + 4a_2) = 0, \tag{22}$$

$$g(p, p_2) = 0 \Rightarrow -(a_0 + a_1 + a_2) + 4(a_0 + 2a_1 + 4a_2) = 0. \tag{23}$$

Le tre equazioni ottenute hanno come unica soluzione $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Quindi solo il polinomio nullo è ortogonale a tutti i polinomi in $\mathbb{R}_2[t]$, per cui il prodotto scalare non è degenere.

e) Per determinare gli indici di positività e nullità costruiamo una base $\mathcal{B}' = \{q_0, q_1, q_2\}$ ortogonale rispetto al prodotto scalare assegnato:

$$q_0(t) = p_0(t) = 1, \tag{24}$$

$$q_1(t) = p_1(t) - \frac{g(p_1, q_0)}{g(q_0, q_0)}\, q_0(t) = t - 1, \tag{25}$$

$$q_2(t) = p_2(t) - \frac{g(p_2, q_0)}{g(q_0, q_0)}\, q_0(t) - \frac{g(p_2, q_1)}{g(q_1, q_1)}\, q_1(t) = t^2 - 2t - 1. \tag{26}$$

Siccome

$$g(q_0, q_0) = 1 > 0, \quad g(q_1, q_1) = 2 > 0, \quad g(q_2, q_2) = -2 < 0, \tag{27}$$

concludiamo che l'indice di positività del prodotto scalare vale due, quello di nullità zero.

f) Una base per U è data da

$$\mathcal{B}_U = \{u_1(t) = t, u_2(t) = t^2\}. \tag{28}$$

Imponendo l'ortogonalità di una generico polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{R}_2[t]$ ai vettori di $\mathcal{B}_U$ otteniamo le condizioni

$$g(p, u_1) = 0 \Rightarrow -(a_0 + a_1 + a_2) + 2(a_0 + 2a_1 + 4a_2) = 0, \tag{29}$$

$$g(p, u_2) = 0 \Rightarrow -(a_0 + a_1 + a_2) + 4(a_0 + 2a_1 + 4a_2) = 0. \tag{30}$$

Ponendo $x = a_0 + a_1 + a_2$, $y = a_0 + 2a_1 + 4a_2$ vediamo che il sistema ha come unica soluzione $x = y = 0$, vale a dire $a_1 = -\frac{3}{2}\, a_0$, $a_2 = \frac{1}{2}\, a_0$. Quindi $U^\perp$ ha dimensione uno e una base di $U^\perp$ è data da

$$\mathcal{B}_{U^\perp} = \left\{ u^\perp(t) = 1 - \frac{3}{2}\, t + \frac{1}{2}\, t^2 \right\}, \tag{31}$$

vale a dire che $U^\perp$ contiene i polinomi che si annullano sia per $t = 1$ che per $t = 2$.

g) Vale $\mathbb{R}_2[t] = U \oplus U^\perp$ (e quindi anche $\mathbb{R}_2[t] = U + U^\perp$) in quanto, riducendo a scala la matrice M che ha come colonne le coordinate di $u_1, u_2, u^\perp$ rispetto alla base canonica $\{p_0, p_1, p_2\}$, otteniamo

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{32}$$

per cui M ha rango tre e quindi $\dim(U + U^\dagger) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[t])$.