ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 19/9/2005

1. a) Calcolare autovalori ed autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

b) La matrice è diagonalizzabile?
c) Esiste un cambiamento di base che trasformi la matrice A nella matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}? \tag{2}$$

2. Siano $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 su $\mathbf{R}$ e T l'operatore da V in V, definito da $T(A) = MA$ per ogni $A \in V$, con

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

a) Dimostrare che T è lineare.
b) Calcolare autovalori ed autovettori di T.
c) T è diagonalizzabile?

3. Studiare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ kx + y + z = k, \\ kx + y = 0. \end{cases} \tag{4}$$

4. Dare la definizione di operatore aggiunto.
Sia A l'operatore lineare da $\mathbf{C}^3$ in $\mathbf{C}^3$ definito da

$$A(x, y, z) = (x + 2iy, y - 3iz, x + (1 - i)y + z). \tag{5}$$

Trovare l'aggiunto $A^\star$ di A.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 19/9/2005

1. a) Poiché la matrice è triangolare, gli autovalori si leggono sulla diagonale: $\lambda_1 = 1$ è autovalore semplice mentre $\lambda_2 = 2$ ha molteplicità algebrica due. I corrispondenti autospazi sono dati da

$$V_1 = \{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}\}, \tag{6}$$

$$V_2 = \{ b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbf{R}\}. \tag{7}$$

b) L'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità geometrica uguale ad uno, strettamente minore della molteplicità algebrica che è uguale a due, per cui la matrice non è diagonalizzabile.
c) Poiché la matrice A non è diagonalizzabile non esiste alcuna trasformazione di coordinate che la trasformi in A'.

2. a) T è lineare poiché

$$T(aA + bB) = M(aA + bB) = aMA + bMB = aT(A) + bT(B), \tag{8}$$

per ogni $A, B \in V$ e per ogni $a, b \in \mathbf{R}$.
b) Troviamo prima di tutto la rappresentazione matriciale di T rispetto, per esempio, alla base

$$\left\{E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}. \tag{9}$$

Abbiamo

$$T(E_1) = ME_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1,$$

$$T(E_2) = ME_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2,$$

$$T(E_3) = ME_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_1 + E_3,$$

$$T(E_4) = ME_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 + E_4. \tag{10}$$

La matrice associata alla trasformazione lineare T rispetto alla base scelta è allora data da

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Tale matrice ha come unico autovalore $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica quattro. Il corrispondente autospazio è dato da

$$V_1 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbf{R} \right\}. \tag{12}$$

c) Poiché a molteplictà geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ vale due ed è strettamente minore della molteplictà algebrica, allora la matrice non è diagonalizzabile.

3. La matrice del sistema omogeneo associato è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

mentre la matrice completa è

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Poiché $\det(A) = k - 1$, per $k \neq 1$ abbiamo $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^\star) = 3$, dove 3 è anche il numero di incognite del sistema. In questo caso il sistema ha una sola soluzione. Per $k = 1$ abbiamo $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^\star) = 2$, per cui il sistema ha ∞^1 soluzioni.

4. Data la base usuale

$$\mathcal{B} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{15}$$

abbiamo

$$A(e_1) = e_1 + e_3, \; A(e_2) = 2ie_1 + e_2 + (1-i)e_3, \; A(e_3) = -3ie_2 + e_3. \tag{16}$$

Quindi la matrice associata ad A rispetto alla base $\mathcal{B}$ è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 0 & 1 & -3i \\ 1 & 1-i & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

La matrice associata a $A^\star$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la trasposta coniugata di A. Perció

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2i & 1 & 1+i \\ 0 & 3i & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Di conseguenza

$$T^\star(x, y, z) = (x + z, -2ix + y + (1+i)z, 3iy + z). \tag{19}$$