ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 20/9/2013

1. Discutere, al variare di α e β in $\mathbb{C}$, la risolubilità in campo complesso del sistema lineare
$$\begin{cases} x + 2y + \alpha z = 0, \\ \alpha y - z = 1, \\ \alpha x + z = \beta. \end{cases} \tag{1}$$
Quando il sistema è risolubile trovarne le soluzioni.

2. Si considerino le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $G_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definite da
$$F(x, y, z) = (3x - y + 2z, 2x + 2y + 4z, x - 3y - 2z), \tag{2}$$
$$G_k(1, 2) = (3, 2, 1), \quad G_k(2, -1) = (k, 0, 2), \quad k \in \mathbb{R}. \tag{3}$$
a) Determinare la dimensione e una base per i sottospazi $\mathrm{Ker}(F)$, $\mathrm{Im}(F)$ e, al variare di k, $\mathrm{Ker}(G_k)$ e $\mathrm{Im}(G_k)$.
b) Determinare, al variare di k, la dimensione e una base per i sottospazi $\mathrm{Im}(F) + \mathrm{Im}(G_k)$ e $\mathrm{Im}(F) \cap \mathrm{Im}(G_k)$.

3. Sia data l'applicazione $g : \mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$, definita da
$$g(p, q) = \int_0^1 p(t)q(t)dt + \int_0^{-1} p(t)q(t)dt. \tag{4}$$
a) Dimostrare che g è un prodotto scalare.
b) Tale prodotto scalare è definito positivo? È non degenere?
c) Scrivere la matrice associata a tale prodotto scalare rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.
d) Calcolare l'indice di positività e l'indice di nullità del prodotto scalare g.
e) Dimostrare che
$$W = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] \,|\, p(t) = p(-t)\} \tag{5}$$
è un sottospazio e trovarne la dimensione e una base.
f) Determinare la dimensione e una base del complemento ortogonale $W^\perp$ (rispetto al prodotto scalare g) di W.
g) Determinare se $\mathbb{R}_2[t] = W + W^\perp$ e se $\mathbb{R}_2[t] = W \oplus W^\perp$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 20/9/2013

1. Il sistema ammette un'unica soluzione quando il rango di entrambe le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & -1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix} \tag{6}$$

è uguale a 3. Ciò accade quando $\det(A) = -\alpha(\alpha^2+1) \neq 0$, vale a dire per $\alpha \neq 0, \pm i$. Questo indipendentemente dal valore assunto da β. In questo caso la soluzione (unica) del sistema (che si può ottenere ad esempio mediante il metodo di Gauss oppure con il metodo di Cramer) vale

$$x = \frac{\alpha^2\beta + 2\beta + 2}{\alpha(\alpha^2+1)}, \quad y = \frac{\alpha^2 - \beta - 1}{\alpha(\alpha^2+1)}, \quad z = -\frac{\beta+2}{\alpha^2+1}. \tag{7}$$

Per $\alpha = 0$, $\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{rg}(A^\star)$ solamente se $\beta = -1$. Quindi il sistema non è risolubile per $\alpha = 0, \beta \neq -1$, mentre per $\alpha = 0$, $\beta = -1$ la dimensione dell'insieme delle soluzioni vale uno (geometricamente una retta in $\mathbb{R}^3$ non passante per l'origine) e otteniamo

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ z + 1 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Per $\alpha = \pm i$, $\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{rg}(A^\star)$ solamente se $\beta = -2$. Quindi il sistema non è risolubile per $\alpha = \pm i, \beta \neq -2$, mentre per $\alpha = \pm i$, $\beta = -2$ la dimensione dell'insieme delle soluzioni vale uno. Per $\alpha = i, \beta = -2$ otteniamo

$$\begin{cases} y = i - x, \\ z = -2 - ix, \end{cases} \tag{9}$$

mentre per $\alpha = -i, \beta = -2$ abbiamo

$$\begin{cases} y = -i - x, \\ z = -2 + ix. \end{cases} \tag{10}$$

2. a) Riducendo a scala la matrice

$$M_F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

associata ad F rispetto alla base canonica vediamo che $\mathrm{rg}(M_F) = \dim(\mathrm{Im}(F)) = 2$ e che una base per l'immagine di F è data da

$$\mathcal{B}_{I(F)} = \{(3,2,1), (-1,2,-3)\}. \tag{12}$$

Ne consegue che $\dim(\mathrm{Ker}(F)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(F)) = 1$. Una base per il nucleo è ottenuta risolvendo il sistema lineare $M_F X = 0$, con $X = (x,y,z)$ vettore colonna in $\mathbb{R}^3$. Otteniamo come soluzione di tale sistema $y = -z, x = -z$ e quindi una base del nucleo è data da

$$\mathcal{B}_{K(F)} = \{(-1,-1,1)\}. \tag{13}$$

I vettori $G_k(1,2)$ e $G_k(2,-1)$ sono linearmente indipendenti per qualunque valore di k. Quindi il nucleo di G_k ha dimensione nulla, $\mathrm{Ker}(G_k) = \{0\}$ e l'immagine di G_k ha dimensione due, con una base data da

$$\mathcal{B}_{I(G_k)} = \{(3,2,1),(k,0,2)\}. \tag{14}$$

b) Il vettore $(3,2,1)$ appartiene sia all'immagine di F che a quella di G_k. Riducendo a scala la matrice che ha come vettori colonna questo vettore e i rimanenti vettori di $\mathcal{B}_{I(F)}$ e $\mathcal{B}_{I(G_k)}$ otteniamo

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 3 & -1 & k \\ 0 & 8 & -2k \\ 0 & 0 & 6-3k \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Vediamo quindi che i tre vettori sono linearmente indipendenti per $k \neq 2$. In questo caso $\dim(\mathrm{Im}(F) + \mathrm{Im}(G_k)) = 3$ e una base di $\mathrm{Im}(F) + \mathrm{Im}(G_k)$ è ad esempio la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Inoltre $\dim(\mathrm{Im}(F) \cap \mathrm{Im}(G_k)) = \dim(\mathrm{Im}(F)) + \dim(\mathrm{Im}(G_k)) - \dim(\mathrm{Im}(F) + \mathrm{Im}(G_k)) = 1$ e una base dell'intersezione dei due sottospazi è costituita dal vettore comune alle basi $\mathcal{B}_{I(F)}$ e $\mathcal{B}_{I(G_k)}$:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(F)\cap\mathrm{Im}(G_k)} = \{(3,2,1)\}. \tag{16}$$

Per $k = 2$, $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Im}(G_k) = \mathrm{Im}(F) + \mathrm{Im}(G_k) = \mathrm{Im}(F) \cap \mathrm{Im}(G_k)$.

3. a) i)

$$\begin{aligned} g(q,p) &= \int_0^1 q(t)p(t)dt + \int_0^{-1} q(t)p(t)dt \\ &= \int_0^1 p(t)q(t)dt + \int_0^{-1} p(t)q(t)dt = g(p,q), \quad \forall p,q \in \mathbb{R}_2[t]. \end{aligned} \tag{17}$$

ii)

$$\begin{aligned} g(p,q_1+q_2) &= \int_0^1 p(t)(q_1+q_2)(t)dt + \int_0^{-1} p(t)(q_1+q_2)(t)dt \\ &= \int_0^1 p(t)q_1(t)dt + \int_0^{-1} p(t)q_1(t)dt + \int_0^1 p(t)q_2(t)dt + \int_0^{-1} p(t)q_2(t)dt \\ &= g(p,q_1) + g(q,p_2), \quad \forall p,q_1,q_2 \in \mathbb{R}_2[t]. \end{aligned} \tag{18}$$

iii)

$$\begin{aligned} g(p,kq) &= \int_0^1 p(t)(kq)(t)dt + \int_0^{-1} p(t)(kq)(t)dt \\ &= k\left[\int_0^1 p(t)q(t)dt + \int_0^{-1} p(t)q(t)dt\right] = kg(p,q), \quad \forall p,q \in \mathbb{R}_2[t], \forall k \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{19}$$

b) Il prodotto scalare non è definito positivo in quanto, ad esempio, $g(1,1) = 0$. Inoltre è degenere siccome, imponendo l'ortogonalità di un generico polinomio $p(t) = a + bt + ct^2$ a tutti i vettori della base canonica $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$, otteniamo le condizioni $b = 0$, $2a + c = 0$. Quindi tutto i vettori multipli di $2t^2 - 1$ sono ortogonali a tutti i vettori di $\mathbb{R}_2[t]$.

c) Gli elementi c_{ij} della matrice C associata al prodotto scalare rispetto alla base $\{p_1(t) = 1, p_2(t) = t, p_3(t) = t^2\}$ sono per definizione dati da $c_{ij} = g(p_i, p_j)$. Otteniamo

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

d) Diagonalizzando la matrice C otteniamo il polinomio caratteristico $p_C(\lambda) = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{5}{4}\right)$. Gli autovalori sono quindi dati da $0, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, tutti con molteplicità uguale ad uno. Concludiamo quindi che gli indici di positività e di nullità del prodotto scalare sono entrambi uguali ad uno.

e) Dati generici $p_1, p_2 \in W$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$(\alpha p_1 + \beta p_2)(t) = \alpha p_1(t) + \beta p_2(t) = \alpha p_1(-t) + \beta p_2(-t) = (\alpha p_1 + \beta p_2)(-t). \tag{21}$$

Quindi anche $\alpha p_1 + \beta p_2 \in W$ e questo implica che W sia un sottospazio.
W ha dimensione 2 e una base di W è data da $\mathcal{B}_W = \{1, t^2\}$.

f) Imponendo l'ortogonalità di un generico polinomio $p(t) = a + bt + ct^2$ ai vettori della base $\mathcal{B}_W$ otteniamo la condizione $b = 0$. Quindi $W^\perp = W$.

g) Non vale $\mathbb{R}_2[t] = W + W^\perp$ in quanto $W + W^\perp = W$ che è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}_2[t]$. Non vale quindi neppure $\mathbb{R}_2[t] = W \oplus W^\perp$.