ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 21/9/2010

1. Si consideri il sistema lineare
$$\begin{cases} x+y+4t=2, \\ 2x+y+2z+6t=3, \\ 3x+2y+2z+10t=5. \end{cases} \tag{1}$$
Si dica se il sistema è risolubile e, nel caso in cui lo sia, lo si risolva e si determini la dimensione dell'insieme delle soluzioni.

2. Si consideri $A_k \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$:
$$A_k = \begin{pmatrix} k^2 & -12 & 12 \\ 0 & -k & 3k \\ 0 & k & k \end{pmatrix}. \tag{2}$$
Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$:
a) la dimensione e una base di $\mathrm{Im}(A_k)$;
b) la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}(A_k)$;
c) Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la diagonalizzabilità in $\mathbb{R}$ di A_k.

3. Sia $V = \mathbf{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a due.
a) Dimostrare che l'applicazione $g : V \times V \to \mathbf{R}$, definita da
$$g(q,p) = \int_0^1 q(t)p(t)\,dt \tag{3}$$
è un prodotto scalare.
b) Trovare una base di V ortogonale rispetto al prodotto scalare sopra definito.

4. Dato il vettore $a = (1,-1,2)$, sia A l'operatore tale che
$$Av = a \times v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3, \tag{4}$$
dove l'operazione $a \times v$ è definita da
$$a \times v = (a_y v_z - a_z v_y, a_z v_x - a_x v_z, a_x v_y - a_y v_x), \tag{5}$$
con $a = (a_x, a_y, a_z)$ e $v = (v_x, v_y, v_z)$.
a) Dimostrare che A è lineare.
b) Calcolare autovalori ed autovettori in $\mathbb{R}$ di A; A è diagonalizzabile?
c) Determinare $\mathrm{Ker}(A)$ e $\mathrm{Im}(A)$.
d) Determineare $\mathrm{Ker}(A) + \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A)$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 21/9/2010

1. Chiamiamo A la matrice dei coefficienti del sistema e $A^\star$ la matrice completa dei termini noti. Siccome $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^\star) = 2$, il teorema di Rouché-Capelli assicura che il sistema sia risolubile. La dimensione dell'insieme delle soluzioni è $4 - \operatorname{rank}(A) = 2$.

   Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} x = 1 - 2z - 2t, \\ y = 1 + 2z - 2t. \end{cases} \tag{6}$$

   L'insieme delle soluzioni risulta quindi

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}. \tag{7}$$

2. a)-b) $\det(A_k) = -4k^4$, per cui per $k \neq 0$ abbiamo $\operatorname{rank}(A_k) = 3$, $\operatorname{Im}(A_k) = \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Ker}(A_k) = \{0\}$, $\mathcal{B}_I = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

   Per $k = 0$, $\dim(\operatorname{Im}(A_0)) = 1$, $\dim(\operatorname{Ker}(A_0)) = 2$, $\mathcal{B}_I = \{(1,0,0)\}$, $\mathcal{B}_K = \{(1,0,0),(0,1,1)\}$.

   c) Il polinomio caratteristico

$$p_{A_k}(\lambda) = (\lambda - k^2)(\lambda^2 - 4k^2) \tag{8}$$

   ha come radici k^2, $-2k$ e $2k$.

   Per $k \neq 0, \pm 2$ a matrice A_k ha tre autovalori reali distinti e quindi è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

   Per $k = 0$ l'unico autovalore è $\lambda_0 = 0$, che ha molteplicità algebrica uguale a 3, mentre la corrispondente molteplicità geometrica (dimensione del nucleo di A_0) ha dimensione 2. Quindi A_0 non è diagonalizzabile.

   Per $k = -2$ gli autovalori sono $\lambda_0 = -4$ (con molteplicità algebrica 1) e $\lambda_1 = 4$ (con molteplicità algebrica 2). Siccome $A_{-2} - 4I$ ha rango 2, l'autospazio V_1 ha dimensione $3 - \operatorname{rank}(A_{-2} - 4I) = 1$. Ne consegue che la molteplicità geometrica di λ_1 è minore di quella algebrica e quindi A_{-2} non è diagonalizzabile.

Per $k = 2$ gli autovalori sono $\lambda_0 = -4$ (con molteplicità algebrica 1) e $\lambda_1 = 4$ (con molteplicità algebrica 2). Siccome $A_2 - 4I$ ha rango 1, l'autospazio V_1 ha dimensione $3 - \mathrm{rank}(A_2 - 4I) = 2$. Ne consegue che la molteplicità geometrica di λ_1 è uguale a quella algebrica e quindi A_2 è diagonalizzabile.

3. a) Sono verificate le proprietà di un prodotto scalare:

$$i)\ \forall p, q \in V,\ g(p,q) = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt = \int_0^1 q(t)p(t)\,dt = g(q,p). \tag{9}$$

ii)

$$\forall p, q, r \in V,\ g(p, q+r) = \int_0^1 p(t)[(q+r)(t)]\,dt$$
$$= \int_0^1 p(t)q(t)\,dt + \int_0^1 p(t)r(t)\,dt = g(p,q) + g(p,r). \tag{10}$$

iii)

$$\forall p, q \in V, \forall c \in \mathbb{R},\ g(p, cq) = \int_0^1 p(t)(cq)(t)\,dt$$
$$= c\int_0^t p(t)q(t)\,dt = cg(p,q). \tag{11}$$

b) Partendo dalla base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ e ortogonalizzandola mediante il metodo di Gram-Schmidt si ottiene $\mathcal{B}' = \{1, t - \frac{1}{2}, t^2 - t + \frac{1}{6}\}$.

4. a) Si verifica dalla definizione di $a \times v$ che, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, $a \times (\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha(a \times v_1) + \beta(a \times v_2)$.

b) La matrice associata ad A rispetto alla base $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ è data da

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Il polinomio caratteristico $p_A = \lambda^3 + 6\lambda$, per cui l'unico autovalore in $\mathbb{R}$ di A è $\lambda = 0$, con molteplicità algebrica uguale ad uno. Il corrispondente autospazio è la retta passante per l'origine e diretta come a. Siccome la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali vale uno ed è minore di tre, ne consegue che A non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

c) Il nucleo di A è l'autospazio corrispondente all'autovalore nullo. L'immagine di A ha dimensione due ed è data dal piano per l'origine perpendicolare al vettore a; una sua base è $\mathcal{B}_I = \{(0,2,1),(-2,0,1)\}$.

d) $\mathrm{Ker}(A)+\mathrm{Im}(A)=\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Ker}(A)\cap\mathrm{Im}(A)$ contiene solo il vettore nullo.