ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 22/9/2008

1. Dato l'insieme

$$U = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \mid AM = 0 \right\}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

verificare se U è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ e nel caso trovare una base di U.

2. Data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da

$$f(x, y, z) = (-x + kz, kz, y + z), \quad k \in \mathbf{R}, \quad (2)$$

determinare, al variare di k, una base per il nucleo e una base per l'immagine di f. Dire per quali k l'applicazione è iniettiva e/o suriettiva.

3. Sia $\mathbf{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a due.
a) Dimostrare che l'applicazione $\phi : \mathbf{R}_2[t] \to \mathbf{R}_2[t]$, definita da

$$\phi(p(t)) = p(ht + 1), \quad p(t) \in \mathbf{R}_2[t], \ \ h \in \mathbf{R} \quad (3)$$

è lineare.
b) Determinare, al variare di h, gli autovalori e gli autospazi di ϕ.
c) Dire per quali h l'applicazione ϕ è diagonalizzabile.

4. Sia data l'applicazione $g : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, definita da

$$g(A, B) = \mathrm{Tr}({}^t BA), \quad (4)$$

a) Dimostrare che tale applicazione è un prodotto scalare.
b) Trovare il complemento ortogonale, rispetto a g, del sottospazio

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}. \quad (5)$$

5. Dimostrare che le matrici quadrate A e ${}^t A$ hanno gli stessi autovalori. Dare un esempio in cui A e ${}^t A$ hanno differenti autovettori.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 22/9/2008

1. Dalla condizione $AM = 0$ ricaviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 3a+9c & 3b+9d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

da cui $a = -3c$, $b = -3d$. Dati due numeri reali α e β e due matrici $M_1, M_2 \in U$, abbiamo

$$A(\alpha M_1 + \beta M_2) = \alpha A M_1 + \beta A M_2 = 0, \tag{7}$$

quindi $\alpha M_1 + \beta M_2 \in U$. Ne consegue che U é un sottospazio di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$. Una base di U è costituita da

$$\left\{ E_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{8}$$

2. Applicando f ai vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$ otteniamo

$$f(1,0,0) = (-1,0,0),\ f(0,1,0) = (0,0,1),\ f(0,0,1) = (k,k,1). \tag{9}$$

La matrice associata ad f rispetto alla base canonica è quindi

$$M_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Riducendo la matrice mediante il metodo di Gauss otteniamo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Qundi rango$(M_f) = 2$ se $k = 0$ e rango$(M_f) = 3$ se $k \neq 0$.

Se $k \neq 0$, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. Quindi l'applicazione è in questo caso sia iniettiva che suriettiva e una base per l'immagine è ad esempio la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Se $k = 0$, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. Quindi l'applicazione non è in questo caso iniettiva e neppure suriettiva. Il nucleo è ottenuto imponendo $f(x, y, z) = 0$, da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} -x = 0, \\ y + z = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Una base per il nucleo è ad esempio

$$\mathcal{B}_K = \{(0, 1, -1)\}\,. \tag{13}$$

Una base per l'immagine è

$$\mathcal{B}_I = \{f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0),\ f(0, 1, 0) = (0, 0, 1)\}\,. \tag{14}$$

3. a) Dati $p,q \in \mathbf{R}_2[t]$ e $a, b \in \mathbf{R}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \phi[(ap + bq)(t)] &= (ap + bq)(ht + 1) = ap(ht + 1) + bq(ht + 1) \\ &= a\phi(p(t)) + b\phi(q(t)) \end{aligned} \tag{15}$$

e quindi ϕ è lineare.
b) Costruiamo la matrice M_ϕ associata a ϕ rispetto alla base

$$\{p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2\}. \tag{16}$$

Abbiamo

$$\begin{array}{l} \phi(p_0(t)) = 1 = p_0(t), \\ \phi(p_1(t)) = p_1(ht + 1) = ht + 1 = p_0(t) + hp_1(t), \\ \phi(p_2(t)) = p_2(ht + 1) = (ht + 1)^2 = p_0(t) + 2hp_1(t) + h^2 p_2(t), \end{array} \tag{17}$$

da cui

$$M_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & h & 2h \\ 0 & 0 & h^2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Gli autovalori di questa matrice (triangolare superiore) sono gli elementi sulla diagonale: $1, h, h^2$.

Per $h \neq 0, \pm 1$ i tre autovalori sono distinti. I corrispondenti autospazi hanno dimensione 1 e sono dati da

$$\begin{aligned} &V_1 = \{ap_0(t),\ a \in \mathbf{R}\}, \\ &V_h = \{b[p_0(t) + (h-1)p_1(t)],\ b \in \mathbf{R}\}, \\ &V_{h^2} = \left\{ c\left[\frac{1}{(h-1)^2}p_0(t) + \frac{2}{h-1}p_1(t) + p_2(t) \right],\ c \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Per $h = 0$ gli autovalori sono 1 (con molteplicità algebrica uguale ad 1) e 0 (con molteplicità algebrica 2). I corrispondenti autospazi sono dati da

$$\begin{aligned} &V_0 = \{a[p_0(t) - p_1(t)] + b[p_0(t) - p_2(t)],\ a, b \in \mathbf{R}\}, \\ &V_1 = \{cp_0(t),\ c \in \mathbf{R}\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Per $h = -1$ gli autovalori sono -1 (con molteplicità algebrica uguale ad 1) e 1 (con molteplicità algebrica 2). I corrispondenti autospazi sono dati da

$$\begin{aligned} &V_1 = \{ap_0(t) + b[p_1(t) - p_2(t)],\ a, b \in \mathbf{R}\}, \\ &V_{-1} = \{c[p_0(t) - 2p_1(t)],\ c \in \mathbf{R}\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Per $h = 1$ l'unico autovalore è 1, con molteplicità algebrica 3. Il corrispondente autospazio è dato da

$$V_1 = \{ap_0(t),\ a \in \mathbf{R}\}. \tag{22}$$

c) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di ϕ vale sempre 3, mentre le molteplicità geometriche sono uguali a quelle algebriche quando $h \neq 1$. Ne consegue che ϕ è diagonalizzabile per $h \neq 1$.

4. a) Per ogni $A, B, C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ e $c \in \mathbf{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} g(B, A) &= \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAB)) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tB{}^t({}^tA)) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = g(A, B), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} g(A, B + C) &= \mathrm{Tr}({}^t(B + C)A) = \mathrm{Tr}(({}^tB + {}^tC)A) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tBA + {}^tCA) = \mathrm{Tr}({}^tBA) + \mathrm{Tr}({}^tCA) = g(A, B) + g(A, C), \end{aligned} \tag{24}$$

$$g(cA, B) = \mathrm{Tr}({}^tB(cA)) = c\mathrm{Tr}({}^tBA) = cg(A, B). \tag{25}$$

b) Una base per U è formata da

$$\mathcal{B}_U = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{26}$$

Data una generica matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, imponendo $g(A, E_1) = 0$, $g(A, E_2) = 0$, $g(A, E_3) = 0$, otteniamo $a = d$, $b = c = 0$, da cui

$$U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \ a \in \mathbf{R} \right\}. \tag{27}$$

5.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det[{}^t(A - \lambda I)] = \det({}^tA - \lambda\, {}^tI) \\ &= \det({}^tA - \lambda I) = p_{{}^tA}(\lambda). \end{aligned} \tag{28}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha come autovalori 0 e 1. I corrispondenti autovettori sono $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gli autovettori della matrice ${}^tA$ sono invece $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.