ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 23/2/2005

1. Sia data in $\mathbf{R}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ e si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$f(e_1) = e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_3, \quad f(e_3) = ke_1 - e_2, \tag{1}$$

   con $k \in \mathbf{R}$.
   a) Scrivere la matrice M_f associata all'applicazione lineare f.
   b) Trovare gli autovalori di M_f al variare di k.
   c) Studiare la diagonalizzabilità di M_f al variare di k.
   d) Per quali valori di k la matrice M_f è invertibile?
   e) Per quali valori di k il vettore $v = e_1 + e_3$ è un autovettore?

2. Determinare in funzione del parametro reale λ le eventuali soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 1, \\ x + \lambda y + z = 1, \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases} \tag{2}$$

3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

   se ne calcolino gli autovalori e se ne discuta la diagonalizzabilità.

4. Dare la definizione di complemento ortogonale $S^{\perp}$ di un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che $S^{\perp}$ è un sottospazio di V.
   Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo K. In V sia definito un prodotto scalare non degenere. Dimostrare che, se W è un sottospazio di V, allora $W^{\perp\perp} = W$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 23/2/2005

1. a)
$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$
b) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 - k\lambda + 1 - k = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1 - k)$. Gli autovalori sono
$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{4k - 3}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{4k - 3}}{2}. \tag{5}$$
Gli autovalori λ_2 e λ_3 non sono definiti in campo reale per $k < \frac{3}{4}$.
c) Per $k = \frac{3}{4}$, abbiamo $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$. L'autospazio associato all'autovalore $\frac{1}{2}$ ha dimensione uno ed è generato da
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}. \tag{6}$$
Quindi per $k = \frac{3}{4}$ la matrice M_f non è diagonalizzabile. Per $k > \frac{3}{4}$ i tre autovalori di M_f sono distinti (e quindi la matrice è diagonalizzabile) salvo che per $k = 3$, per cui $\lambda_1 = \lambda_3 = -1$. In questo caso, l'autospazio associato all'autovalore -1 ha dimensione uno ed è generato da
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$
In conclusione, la matrice M_f è diagonalizzabile per $k > \frac{3}{4}$, purché $k \neq 3$.
d) La matrice M_f possiede l'autovalore nullo ($\lambda_3 = 0$) per $k = 1$. Quindi M_f non è invertibile in questo caso.
e) Abbiamo
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$
per cui il vettore dato è autovettore (corrispondente all'autovalore 1) solo per $k = 1$.

2. Scriviamo il sistema come $Au = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Abbiamo $\det(A) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$. Quindi per $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -1$ il sistema ammette una e una sola soluzione, calcolabile mediante il metodo di Cramer. Abbiamo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = \frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = \frac{1}{\lambda + 2}. \tag{10}$$

Siccome nelle tre equazioni x, y e z compaiono in ruoli simmetrici avremo poi $x = y = z = \frac{1}{\lambda+2}$.
Per $\lambda = 1$ il sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Evidentemente esso si riduce all'equazione

$$x + y + z = 1. \tag{12}$$

Dunque per $\lambda = 1$ le soluzioni esistono e sono del tipo

$$\begin{pmatrix} t \\ u \\ 1 - t - u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Per $\lambda = -2$ il sistema diventa

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

In questo caso si ha rango$(A) = 2$. Chiamando $A^\star$ la matrice completa dei termini noti, cioé

$$A^\star = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

otteniamo rango$(A^\star) = 3 \neq$ rango(A). Quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non è risolubile.

3. La matrice data ha rango 1 per cui, considerata l'applicazione lineare $L(X) = AX$, con ${}^tX = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5$, abbiamo $\dim(\mathrm{Im}(L)) =$ rango$(A) = 1$ e $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 5 - 1 = 4$. Quindi $\lambda_0 = 0$ è autovalore di A con molteplicità geometrica 4 e molteplicità algebrica ≥ 4. Si vede poi che un altro autovalore di A è $\lambda_1 = 25$, con molteplicità algebrica ≥ 1. Infatti abbiamo

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix} = 25 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori non può essere più grande che la dimensione della matrice. Allora non ci possono essere altri autovalori e la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda_0 = 0$ vale 4, mentre quella dell'autovalore $\lambda_1 = 25$ è 1. Siccome la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 0 è 4, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 25 è 1, quindi tutti gli autovalori sono regolari (hanno cioé molteplicità algebrica uguale alle molteplicità geometrica) e la matrice è diagonalizzabile.

4. Sia $w \in W$. Allora $\langle w, v \rangle = 0$ per ogni $v \in W^\perp$. Questo implica che $w \in W^{\perp\perp}$ e, di conseguenza, W è incluso in $W^{\perp\perp}$. Siccome per ipotesi il prodotto scalare è non degenere, allora

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp), \quad \dim(V) = \dim(W^\perp) + \dim(W^{\perp\perp}). \tag{17}$$

Quindi $\dim(W) = \dim(W^{\perp\perp})$. Ma siccome abbiamo anche dimostrato che W è incluso in $W^{\perp\perp}$, ne consegue che $W = W^{\perp\perp}$.