ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 23/2/2007

1. Sia $L : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata (rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^4$ e $\mathbf{R}^3$) dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   a) Determinare una base per il nucleo di L e una base per l'immagine di L.
   b) Dire se L è iniettiva e/o suriettiva.

2. a) Enunciare il teorema di Rouché-Capelli.
   b) Servendosi di tale teorema, si discuta la risolubilità e si trovino (ove esistano) le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + ky - 2(k+1)z = 0, \\ -3x + 3z = 0, \\ 4x - ky - 4z = 0, \\ x - z = k + 1, \end{cases} \tag{2}$$

   al variare di $k \in \mathbf{R}$.

3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita, nella base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, da

$$\begin{cases} f(e_1) = -e_1 + e_2, \\ f(e_2) = e_1 - e_2, \\ f(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases} \tag{3}$$

   a) Scrivere la matrice M associata ad f rispetto alla base assegnata.
   b) Trovare autovalori ed autovettori di M. Tale matrice è diagonalizzabile?
   c) Qual'è la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare $M^2X = X$, con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$?

4. Sia $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$ tale che $A^2 - I = 0$, dove I è la matrice identità. Quali sono i possibili autovalori di A? La matrice A è invertibile?

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbf{C}$, in V sia assegnata una forma hermitiana definita positiva $\langle \ , \ \rangle$, siano A, B operatori definiti su V, $\alpha \in \mathbf{C}$ e si denotino con $A^\star, B^\star$ gli aggiunti di A e B. Dimostrare che (i) $(A+B)^\star = A^\star + B^\star$, (ii) $(AB)^\star = B^\star A^\star$, (iii) $(A^\star)^\star = A$, (iv) $(\alpha A)^\star = \overline{\alpha} A^\star$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 23/2/2007

1. a) Le colonne di M generano l'immagine di L. Siccome la terza colonna di M è multiplo della prima, basta studiare il rango della sottomatrice

$$M' = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Abbiamo $\det(M') = 0$, mentre si possono trovare dei minori di ordine due di M' aventi determinante non nullo. Quindi $\dim(\mathrm{Im}(L)) = \mathrm{rango(M)} = 2$ e una base per $\mathrm{Im}(L)$ è

$$\mathcal{B}_I = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{5}$$

Per quanto riguarda il nucleo, $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = \dim(\mathbf{R}^4) - \dim(\mathrm{Im}(L)) = 4 - 2 = 2$. Un vettore $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartiene al nucleo di L se e solo se $MX = 0$, cioé se X risolve il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Le soluzioni di tale sistema sono della forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{5}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \qquad x_1, x_2 \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Quindi una base per $\mathrm{Ker}(L)$ è

$$\mathcal{B}_K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5/2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{8}$$

b) Siccome il nucleo di L non contiene il solo vettore nullo, L non è iniettiva. Poiché $\mathrm{Im}(L) \neq \mathbf{R}^3$, L non è neppure suriettiva.

2. b) La matrice dei coefficienti del sistema è data da

$$A(k) = \begin{pmatrix} 2 & k & -2(k+1) \\ -3 & 0 & 3 \\ 4 & -k & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

mentre la matrice completa è

$$A^\star(k) = \begin{pmatrix} 2 & k & -2(k+1) & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -k & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & k+1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Siccome $\det(A^\star) = -6k^2(k+1)$, per $k \neq 0, -1$ abbiamo $\mathrm{rango}(A^\star) = 4$ mentre $\mathrm{rango}(A) \leq 3$ e quindi il sistema non è risolubile per il teorema di Rouché-Capelli.
Per $k = 0$ abbiamo $\mathrm{rango}(A) = 1 \neq \mathrm{rango}(A^\star) = 2$, per cui il sistema non è risolubile.
Per $k = -1$ il sistema diventa omogeneo e quindi sicuramente risolubile. Per studiare la dimensione dello spazio delle soluzioni consideriamo la matrice

$$A(k=-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Studiamo ora il rango di $A(k=-1)$. Siccome

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \tag{12}$$

ne consegue che $\mathrm{rango}(A(k=-1)) = 3$, per cui il sistema ammette come unica soluzione il vettore nullo ($x = y = z = 0$).

3. a)
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

b) Il polinomio caratteristico di M è
$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{M}) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+2). \tag{14}$$
Gli autovalori sono allora $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$ e basi per i corrispondenti autospazi sono date da
$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \ \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \ \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{15}$$
Siccome abbiamo 3 autovalori, tutti con molteplicità algebrica 1 e M è una matrice 3×3, ne consegue che M è diagonalizzabile.
c) M ha autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$ e quindi M^2 ha come autovalori $\lambda_1^2 = 0$, $\lambda_2^2 = 1$ e $\lambda_3^2 = 4$. Tali autovalori hanno tutti molteplicità algebrica uguale ad uno e quindi anche le corrispondenti molteplicità geometriche devono esere uguali ad uno. Ne consegue che $M^2 X = X = \lambda_2^2 X$ ha come soluzione un sottospazio (autospazio corrispondente all'autovalore λ_2^2) di dimensione 1.

4. L'unico autovalore di A^2 è uguale a 1, per cui gli autovalori λ di A devono verificare $\lambda^2 = 1$ e quindi i possibili autovalori di A sono $\lambda_\pm = \pm 1$. Siccome $A^2 = I$, $A^{-1} = A$, per cui A è invertibile.

5. (i) Per ogni $u, v \in V$,
$$\langle (A+B)u, v \rangle = \langle u, (A+B)^\star v \rangle, \tag{16}$$
$$\begin{aligned} \langle (A+B)u, v \rangle &= \langle Au + Bu, v \rangle = \langle Au, v \rangle + \langle Bu, v \rangle \\ &= \langle u, A^\star v \rangle + \langle u, B^\star v \rangle = \langle u, A^\star v + B^\star v \rangle = \langle u, (A^\star + B^\star) v \rangle. \end{aligned} \tag{17}$$
L'unicità dell'aggiunto implica che $(A+B)^\star = A^\star + B^\star$.
(ii) Per ogni $u, v \in V$,
$$\langle (AB)u, v \rangle = \langle u, (AB)^\star v \rangle, \tag{18}$$

$$\langle (AB)u, v\rangle = \langle A(Bu), v\rangle = \langle Bu, A^\star v\rangle = \langle u, B^\star(A^\star v)\rangle = \langle u, (B^\star A^\star)v\rangle. \tag{19}$$

L'unicità dell'aggiunto implica che $(AB)^\star = B^\star A^\star$.
(iii) Per ogni $u, v \in V$,

$$\langle A^\star u, v\rangle = \langle u, (A^\star)^\star v\rangle, \tag{20}$$

$$\langle A^\star u, v\rangle = \overline{\langle v, A^\star u\rangle} = \overline{\langle Av, u\rangle} = \langle u, Av\rangle. \tag{21}$$

L'unicità dell'aggiunto implica che $(A^\star)^\star = A$.
(iv) Per ogni $u, v \in V$,

$$\langle (\alpha A)u, v\rangle = \langle u, (\alpha A)^\star v\rangle, \tag{22}$$

$$\langle (\alpha A)u, v\rangle = \alpha\langle Au, v\rangle = \alpha\langle u, A^\star v\rangle = \langle u, \overline{\alpha} A^\star v\rangle. \tag{23}$$

L'unicità dell'aggiunto implica che $(\alpha A)^\star = \overline{\alpha} A^\star$.