ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 23/2/2010

1. Si considerino i seguenti due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \mid x = 0\}, \quad W = \{(x, y, z) \mid y = 2x, z = 3x\}. \tag{1}$$

a) Dimostrare che U, W sono sottospazi.
b) Trovare la dimensione e una base sia per U che per W.
c) Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.
d) Si consideri l'applicazione lineare L tale che

$$\mathrm{Ker}(L) = U, \quad \mathrm{Im}(L) = W, \quad L^2 = L. \tag{2}$$

Trovare la matrice associata all'applicazione lineare L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
e) Discutere la diagonalizzabilità di L.

2. Si consideri $A_k \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$:

$$A_k = \begin{pmatrix} k & k & k+1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$:
a) la dimensione e una base di $\mathrm{Im}(A_k)$;
b) la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}(A_k)$;
c) la dimensione e una base di $\mathrm{Im}(A_k) + \mathrm{Ker}(A_k)$;
d) la dimensione e una base di $\mathrm{Im}(A_k) \cap \mathrm{Ker}(A_k)$;
e) Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la diagonalizzabilità in $\mathbb{R}$ di A_k.

3. Si consideri l'applicazione $g : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definita da

$$g(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tBPA), \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

a) Dimostrare che g è un prodotto scalare.
b) Si consideri il sottoinsieme W di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ formato dalle matrici diagonali. Dimostrare che W è un sottospazio.
c) Trovare la dimensione e una base di W.
d) Trovare la dimensione e una base del complemento ortogonale di W rispetto al prodotto scalare sopra definito.
e) Il prodotto scalare g è definito positivo?

4. Si consideri l'applicazione $\phi : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$, definita da

$$\phi[p(t)] = hp(t) + p'(t), \tag{5}$$

dove l'apice indica la derivata prima rispetto a t e $h \in \mathbb{R}$.
a) Dimostrare che ϕ è lineare.
b) Scrivere la matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_2[t]$, $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.
c) Trovare autovalori ed autospazi di ϕ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
d) Discutere la diagonalizzabilità in $\mathbb{R}$ di ϕ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 23/2/2010

1. a) Dati due generici vettori $u_1 = (0, y_1, z_1)$ e $u_2 = (0, y_2, z_2)$ in U e due generici scalari $a, b \in \mathbb{R}$, anche $au_1 + bu_2 = (0, ay_1 + by_2, az_1 + bz_2) \in U$. Allo stesso modo, dati due generici vettori $w_1 = (x_1, y_1 = 2x_1, z_1 = 3x_1)$ e $w_2 = (x_2, 2x_2, 3x_2)$ in W e due generici scalari $a, b \in \mathbb{R}$, anche $aw_1 + bw_2 = (ax_1 + bx_2, 2(ax_1 + bx_2), 3(ax_1 + bx_2)) \in W$.

   b)
$$\dim(U) = 2, \quad \mathcal{B}_U = \{(0,1,0),(0,0,1)\}, \tag{6}$$
$$\dim(W) = 1, \quad \mathcal{B}_W = \{(1,2,3)\}. \tag{7}$$

   c) Imponendo che un vettore $v = (x, y, z) \in U \cap W$ appartenga ad U otteniamo $x = 0$, da cui l'appartenenza a W implica che anche $y = 0$ e $z = 0$. Quindi $U \cap W = \{0\}$, da cui $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) = 3$ e $\mathbb{R}^3 = U + W = U \oplus W$.

   d) La condizione $\mathrm{Ker}(L) = U$ implica che $L(0,1,0) = 0$ e $L(0,0,1) = 0$. Inoltre $L^2 = L$ implica che i vettori dell'immagine di L siano invarianti sotto applicazione di L. Siccome $\mathrm{Im}(L) = W$ abbiamo che $L(1,2,3) = (1,2,3)$. Inoltre per la linearità di L,
$$L(1,2,3) = L(1,0,0) + 2L(0,1,0) + 3L(0,0,1) = L(1,0,0), \tag{8}$$
   da cui $L(1,0,0) = (1,2,3)$. Conosciamo ora come L agisce sui 3 vettori della base canonica e possiamo quindi construire la matrice associata ad L rispetto a tale base:
$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

   e) Per costruzione è chiaro che L ha come autovalori $\lambda_0 = 0$ (con autospazio U) e $\lambda_1 = 1$ (con autospazio W). Siccome $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ possiamo trovare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di L, ad esempio
$$\mathcal{B} = \{(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\}. \tag{10}$$

2. a)-b) $\det(A_k) = k^2$, per cui per $k \neq 0$ abbiamo $\text{rank}(A_k) = 3$, $\text{Im}(A_k) = \mathbb{R}^3$, $\text{Ker}(A_k) = \{0\}$, $\mathcal{B}_I = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

   Per $k = 0$, $\dim(\text{Im}(A_0)) = 2$, $\dim(\text{Ker}(A_0)) = 1$, $\mathcal{B}_I = \{(0,-1,0),(1,2,0)\}$, $\mathcal{B}_K = \{(0,1,0)\}$,

   c-d) Per $k \neq 0$, $\text{Im}(A_k) + \text{Ker}(A_k) = \mathbb{R}^3$, $\text{Im}(A_k) \cap \text{Ker}(A_k) = \{0\}$.

   Per $k = 0$, $\text{Im}(A_0) + \text{Ker}(A_0) = \text{Im}(A_0)$, $\text{Im}(A_0) \cap \text{Ker}(A_0) = \text{Ker}(A_0)$.

   e) Il polinomio caratteristico

$$p_{A_k}(\lambda) = (\lambda - k)(\lambda^2 - k\lambda + k) \tag{11}$$

   ha come radici k e $\frac{1}{2}(k \pm \sqrt{k^2 - 4k})$.

   Per $0 < k < 4$ solo una di queste radici (k) è reale e quindi A_k non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

   Per $k = 0$ l'unico autovalore è $\lambda_0 = 0$, che ha molteplicità algebrica uguale a 3, mentre la corrispondente molteplicità geometrica (dimensione del nucleo di A_0) ha dimensione 1. Quindi A_0 non è diagonalizzabile.

   Per $k = 4$ gli autovalori sono $\lambda_0 = 4$ (con molteplicità algebrica 1) e $\lambda_1 = 2$ (con molteplicità algebrica 2). Siccome l'autospazio V_1 ha dimensione 1 (una base è data da $\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) ne consegue che A_4 non è diagonalizzabile.

   Per $k < 0$ e $K > 4$ la matrice A_k ha tre autovalori reali distinti e quindi è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

3. a) Per ogni $A, B, C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} g(B, A) &= \text{Tr}({}^tAPB) = \text{Tr}({}^t({}^tAPB)) \\ &= \text{Tr}({}^tB{}^tP{}^t({}^tA)) = \text{Tr}({}^tBPA) = g(A, B), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} g(A, B + C) &= \text{Tr}({}^t(B + C)PA) = \text{Tr}(({}^tB + {}^tC)PA) \\ &= \text{Tr}({}^tBPA + {}^tCPA) = \text{Tr}({}^tBPA) + \text{Tr}({}^tCPA) = g(A, B) + g(A, C), \end{aligned} \tag{13}$$

$$g(cA, B) = \text{Tr}({}^tBP(cA)) = c\text{Tr}({}^tBPA) = cg(A, B). \tag{14}$$

b) Date E_1, E_2 matrici diagonali e a, b numeri reali anche $aE_1 + bE_2$ è una matrice diagonale.

c)

$$\dim(W) = 2, \ \ \mathcal{B}_W = \left\{ D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{15}$$

d) Consideriamo una generica matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ e imponiamo l'ortogonalità di A sia a D_1 che a D_2, cioé richiediamo $g(A, D_1) = g(A, D_2) = 0$. Otteniamo come condizioni $a + c = 0$, $b + d = 0$. Quindi

$$\dim(W^\perp) = 2, \ \ \mathcal{B}_{W^\perp} = \left\{ C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{16}$$

e) Considerando una generica matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, otteniamo $g(A, A) = 0$ quando $(a+c)^2 + (b+d)^2 = 0$, cioé quando $c = -a$, $d = -b$. Quindi esistono matrici $A \neq 0$ tali che $g(A, A) = 0$ e possiamo concludere che g non è definito positivo.

4. a) Dati $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_2[t]$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \phi[(ap_1 + bp_2)(t)] &= h(ap_1 + bp_2)(t) + (ap_1 + bp_2)'(t) \\ = a(hp_1(t) + p_1'(t)) + b(hp_2(t) + p_2'(t)) &= a\phi[p_1(t)] + b\phi[p_2(t)]. \end{aligned} \tag{17}$$

b) Siccome

$$\phi(1) = h, \quad \phi(t) = 1 + ht, \quad \phi(t^2) = 2t + ht^2, \tag{18}$$

otteniamo che la matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica è data da

$$M_\phi = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 0 & h & 2 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}. \tag{19}$$

c) L'unico autovalore è $\lambda = h$, con molteplicità algebrica uguale a tre. Il corrispondente autospazio ha dimensione 1 e comprende i polinomi costanti (una base è data da $\mathcal{B}_\lambda = \{1\}$).

d) Siccome la molteplicità algebrica dell'unico autovalore è differente da quella geometrica ϕ non è diagonalizzabile per nessun valore di k.