ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 23/7/2007

1. a) Si determinino autovalori ed autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 10 & 18 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   b) Tale matrice è diagonalizzabile?

2. a) Servendosi del teorema di Rouché-Capelli, si discuta, al variare di $k \in \mathbf{R}$, la risolubilità del sistema lineare

$$\begin{cases} kx + z = 0, \\ 2y + z = 1, \\ \frac{1}{2}x + k^3 y + k^3 z = -1. \end{cases} \tag{2}$$

   b) Si trovino, ove esistano, le soluzioni di tale sistema.

3. a) Dare le definizioni di applicazione lineare e di nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.
   b) Determinare una base per il nucleo e per l'immagine dell'applicazione lineare $L : P_2(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, definita da

$$L(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + 2b - 2c & 2a + 2b \\ -a + b - 4c & 3a + 2b + 2c \end{pmatrix}. \tag{3}$$

   c) Tale trasformazione è iniettiva, suriettiva o invertibile?

4. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, calcolare A^n.

5. Dimostrare che la funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definita, per ogni $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ da

$$f(x) = \max_{1 \le i \le n} |x_i| \tag{4}$$

   è una norma.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 23/7/2007

1. a) Il polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda - 7 & 0 & 0 \\ -10 & -18 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 7 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 7)^2 \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -10 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 7)^3 \tag{5}$$

ha come radici (autovalori di A) $\lambda_1 = -2$ (con molteplicità algebrica 1) e $\lambda_2 = 7$ (con molteplicità algebrica 3). I corrispondenti autospazi sono dati da

$$V_1 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \, a \in \mathbf{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \, a, b \in \mathbf{R} \right\}. \tag{6}$$

b) Siccome per l'autovalore $\lambda_2 = 7$ la molteplicità geometrica è uguale a 2 e quindi diversa da quella algebrica, ne consegue che la matrice non è diagonalizzabile.

2. b)-c) La matrice dei coefficienti del sistema è data da

$$A(k) = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & k^3 & k^3 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

mentre la matrice completa è

$$A^\star(k) = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & k^3 & k^3 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Siccome $\det(A) = k^4 - 1$, per $k \neq \pm 1$ abbiamo $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A^\star)$, quindi il sistema è risolubile per il teorema di Rouché-Capelli e ammette un'unica soluzione, che si può trovare applicando il metodo di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & k^3 & k^3 \end{vmatrix}}{k^4 - 1} = \frac{k^3 + 2}{k^4 - 1}, \tag{9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & k^3 \end{vmatrix}}{k^4 - 1} = \frac{k^4 + k - \frac{1}{2}}{k^4 - 1}, \tag{10}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & k^3 & -1 \end{vmatrix}}{k^4 - 1} = -\frac{k^4 + 2k}{k^4 - 1}. \tag{11}$$

Per $k = -1$,

$$A^\star(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Siccome

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \tag{13}$$

$\text{rango}(A^\star) = 3 > \text{rango}(A)$, per cui il sistema non è risolubile.
Per $k = 1$,

$$A^\star(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Siccome

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \tag{15}$$

$\text{rango}(A^\star) = 3 > \text{rango}(A)$, per cui il sistema non è risolubile.

3. b) Un polinomio in $P_2(\mathbf{R})$ appartiene al nucleo di L se e solo se

$$L(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+2b-2c & 2a+2b \\ -a+b-4c & 3a+2b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Otteniamo quindi un set di 4 equzioni omogenee in tre variabili,

$$\begin{cases} a+2b-2c=0, \\ 2a+2b=0, \\ -a+b-4c=0, \\ 3a+2b+2c=0. \end{cases} \tag{17}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

ha rango 2 e quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema (cioé del nucleo di L) è uguale ad 1. Risolvendo il sistema otteniamo $b=-a$, $c=-a/2$, per cui $\mathrm{Ker}(L) = \{a - ax - \frac{a}{2}x^2,\ a \in \mathbf{R}\}$. Siccome $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1$, ne consegue che $\dim(\mathrm{Im}(L)) = \dim(P_2) - \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 2$. Una base $\mathcal{B}_I$ per $\mathrm{Im}(L)$ la otteniamo ad esempio applicando L ai polinomi (vettori di P_2) 1 e x, ottenendo

$$\mathcal{B}_I = \left\{ T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, T(x) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}. \tag{19}$$

c) Siccome $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1 > 0$, L non è iniettiva. Inoltre $\dim(\mathrm{Im}(L))= 2 < \dim(\mathcal{M}_{2,2}) = 4$, per cui L non è suriettiva. L non è quindi neppure invertibile.

4. La matrice A è diagonalizzabile e ha come autovalori $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, con corrispondenti autovettori $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Detta $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice (non singolare) che ha come colonne gli

autovettori di A, abbiamo $P^{-1}AP = D$, con $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ne consegue che

$$A^n = (PDA^{-1})^n = PD^nP^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 4 - 3 \times 2^n & -3 + 3 \times 2^n \\ 4 - 4 \times 2^n & -3 + 4 \times 2^n \end{pmatrix}, \tag{20}$$

con $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Verifichiamo che le tre proprietà di una norma sono effettivamente soddisfatte:
(i) Risulta $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$; inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $x_1 = ... = x_n = 0$, cioé se x è il vettore nullo in $\mathbf{R}^n$.
(ii) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ e $x \in \mathbf{R}^n$,

$$f(\lambda x) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i| = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |\lambda| f(x). \tag{21}$$

(i) Per ogni $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ in $\mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = f(x) + f(y). \end{aligned} \tag{22}$$