ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 24/2/2006

1. a) Calcolare autovalori ed autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   b) La matrice è diagonalizzabile?

2. Si considerino lo spazio $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 su $\mathbf{R}$ e la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Sia $T : \mathcal{M}_{2,2} \to \mathcal{M}_{2,2}$ l'applicazione definita, per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}$ da $T(A) = MA$.
   a) Dimostrare che T è lineare.
   b) Trovare il determinante di T.
   c) Dire se T è invertibile.

3. Discutere, al variare di k sia in $\mathbf{R}$ che in $\mathbf{C}$, la risolubilità del sistema lineare

$$\begin{cases} kx + kz = 1, \\ -5x + y + z = 2, \\ -k^2x + z = 3. \end{cases} \tag{2}$$

   Quando il sistema è risolubile trovarne le soluzioni.

4. a) Dare la definizione di somma e di somma diretta di sottospazi.
   b) Si considerino in $\mathbf{R}^4$ i sottospazi U, generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e W, generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trovare le dimensioni di U, W, $U + W$ e $U \cap W$.

5. Si consideri lo spazio $\mathcal{M}_{n.n}(\mathbf{R})$ delle matrici $n \times n$ su $\mathbf{R}$. Si definisca

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B), \tag{3}$$

per ogni $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}$. Verificare se $\langle A, B \rangle$ è un prodotto scalare.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 24/2/2006

1. a) Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 9$, entrambi con molteplicità algebrica uguale a 2, e i corrispondenti autospazi hanno come basi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{4}$$

b) La matrice è diagonalizzabile in quanto la molteplicità algebrica degli autovalori coincide con quella geometrica e la somma delle molteplicità è uguale a 4. Si noti come questa conclusione fosse evidente dall'inizio essendo la matrice simmetrica.

2. a) Dati $A, B \in \mathcal{M}_{2,2}$ a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, abbiamo $T(\alpha A + \beta B) = M(\alpha A + \beta B) = \alpha MA + \beta MB = \alpha T(A) + \beta T(B)$.
b) Scegliendo la base canonica

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{5}$$

di $\mathcal{M}_{2,2}$, abbiamo

$$\begin{aligned} T(E_1) &= E_1 + 3E_3, \\ T(E_2) &= E_2 + 3E_4, \\ T(E_3) &= 2E_1 + 4E_3, \\ T(E_4) &= 2E_2 + 4E_4. \end{aligned} \tag{6}$$

Quindi la matrice associata all'applicatione T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è data da

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Il determinante dell'applicazione, che è indipendente dalla base scelta per ottenere la rappresentazione matriciale di T, vale $\det(T) = \det(M_T) = 4$.
c) Poiché $\det(T) \neq 0$ l'applicazione è invertibile.

3. La matrice A associata al sistema omogeneo associato e la matrice completa $A^\star$ sono date da

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ -5 & 1 & 1 \\ -k^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^\star = \begin{pmatrix} k & 0 & k & 1 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \\ -k^2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Si ha $\det(A) = k(k^2+1)$. Il sistema ammette un'unica soluzione in $\mathbf{R}$ per $k \neq 0$ e in $\mathbf{C}$ per $k \neq 0, \pm i$. Tale soluzione può essere determinata ad esempio mediante il metodo di Cramer e otteniamo

$$x = \frac{-3k+1}{k^3+k},\ y = \frac{2k^3-k^2-16k+5}{k^3+k},\ z = \frac{k^2+3k}{k^3+k}. \tag{9}$$

Per $k = 0$, oppure $k = \pm i$ il sistema è incompatibile dato che rango$(A) = 2 \neq$ rango$(A^\star) = 3$.

4. b) I due vettori che generano U non sono uno multiplo dell'altro, per cui $\dim(U) = 2$. I tre vettori che generano W hanno le ultime due coordinate nulle, per cui appartengono ad un sottospazio di dimensione 2. Poiché tali vettori non sono uno multiplo dell'altro abbiamo $\dim(W) = 2$. La matrice che ha come colonne tutti i vettori,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

ha rango al massimo uguale a tre, poiché una delle 4 righe è una riga di zeri. Considerando poi ad esempio la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

vediamo che essa ha determinante diverso da zero. Quindi M ha rango uguale a 3. Ne segue che $\dim(U+W) = 3$ e inoltre

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 1. \tag{12}$$

5. Non si tratta di un prodotto scalare in quanto, dato uno scalare c,

$$\langle cA, B\rangle = \mathrm{Tr}(cA) + \mathrm{Tr}(B) = c\mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \neq c\langle A, B\rangle = c(\mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)). \tag{13}$$