ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 24/2/2012

1. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \tag{1}$$
Determinare, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$:
a) autovalori ed autospazi di A;
b) se A è diagonalizzabile;
c) per quali y ammette soluzione il sistema $Ax = y$, con x, y vettori colonna in $\mathbb{R}^3$.

2. Si consideri l'applicazione $T : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$, definita da
$$T(X) = AX - XA, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$
a) Dimostrare che l'applicazione T è lineare.
b) Costruire la matrice M associata a T rispetto alla base
$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{3}$$
c) Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine di T.
d) T è iniettiva? È suriettiva? È invertibile?
e) Vale $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$? E $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) = \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)$?
f) Determinare autovalori ed autospazi di T.
g) T è diagonalizzabile?

3. Sia data l'applicazione $g : \mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$, definita da
$$g(p_1, p_2) = \left(\int_0^1 p_1(t)dt \right) \left(\int_0^1 p_2(t)dt \right). \tag{4}$$
a) Dimostrare che g è un prodotto scalare.
b) Scrivere la matrice associata a tale prodotto scalare rispetto alla base $\mathcal{B} = \{p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2\}$.
c) Il prodotto scalare g è definito positivo?
d) Il prodotto scalare g è non degenere?
e) Calcolare indici di positività e nullità del prodotto scalare g.
f) Determinare una base del complemento ortogonale (rispetto al prodotto scalare g) del sottospazio
$$U = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] \mid p(t) = p(-t)\}. \tag{5}$$
g) Determinare se $\mathbb{R}_2[t] = U \oplus U^\perp$ e se $\mathbb{R}_2[t] = U + U^\perp$.
h) Calcolare indici di positività e nullità del prodotto scalare g definito sopra nel caso in cui $g : \mathbb{R}_n[t] \times \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 24/2/2012

1. a-b) La matrice è triangolare e quindi gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale. Distinguiamo due casi:
i) Per $b \neq 0$, abbiamo due autovalori, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = b$, con molteplicità algebriche $\mu_0 = 2$, $\mu_1 = 1$.
ii) Per $b = 0$ c'è un unico autovalore, $\lambda_0 = 0$, con molteplicità algebrica $\mu_0 = 3$.

Nel calcolo degli autospazi distinguiamo, per ognuno dei due casi sopra, $a \neq 0$ e $a = 0$. Basi per gli autospazi nei vari casi sono riportate sotto.

i.1) $b \neq 0, a \neq 0$:

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ b/a \\ (b/a)^2 \end{pmatrix} \right\}. \tag{6}$$

Siccome la molteplicità geometrica $\nu_0 = 1 < \mu_0 = 2$, la matrice non è diagonalizzabile.

i.2) $b \neq 0, a = 0$:

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{7}$$

In questo caso $\nu_0 = \mu_0 = 2$, $\nu_1 = \mu_1 = 1$ e $\mu_0 + \mu_1 = 3$ e quindi la matrice è diagonalizzabile (cosa evidente anche dal fatto che la matrice è diagonale per $a = 0$).

ii.1) $b = 0, a \neq 0$:

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \tag{8}$$

per cui $\nu_0 = 1 < \mu_0 = 3$ e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

ii.2) $b = 0, a = 0$: in questo caso A è la matrice nulla, che è diagonalizzabile ($\nu_0 = \mu_0 = 3$, e l'autospazio V_0 coincide con $\mathbb{R}^3$).

c) Il sistema ammette soluzione se $y \in \mathrm{Im}(A)$, dove, nei vari casi,

i.1) $b \neq 0, a \neq 0$:

$$\mathcal{B}_I = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\}; \tag{9}$$

i.2) $b \neq 0, a = 0$:

$$\mathcal{B}_I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \right\}; \tag{10}$$

ii.1) $b = 0, a \neq 0$:

$$\mathcal{B}_I = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \tag{11}$$

ii.2) $b = 0, a = 0$:

$$\mathrm{Im}(A) = \{0\}. \tag{12}$$

2. a)

$$\begin{aligned} T(\alpha X_1 + \beta X_2) &= A(\alpha X_1 + \beta X_2) - (\alpha X_1 + \beta X_2)A \\ &= \alpha(AX_1 - X_1A) + \beta(AX_2 - X_2A) = \alpha T(X_1) + \beta T(X_2). \end{aligned} \tag{13}$$

b)

$$\begin{cases} T(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = iE_2 + iE_3, \\ T(E_2) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -iE_1 + iE_4, \\ T(E_3) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -iE_1 + iE_4, \\ T(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -iE_2 - iE_3. \end{cases} \tag{14}$$

La matrice associata a T rispetto alla base assegnata è quindi data da

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

c) $\mathrm{rg}(M) = 2$ in quanto le colonne M^1 e M^2 sono linearmente indipendenti e inoltre $M^3 = M^2$, $M^4 = -M^1$. Quindi $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$ e

$$\mathcal{B}_I = \left\{ I_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}. \tag{16}$$

Inoltre $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})) - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$. Una base di $\mathrm{Ker}(T)$ è ricavata risolvendo il sistema $Mx = 0$, con $x \in \mathbb{C}^4$ vettore colonna. Otteniamo

$$\mathcal{B}_K = \left\{ K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{17}$$

d) L'applicazione T non è iniettiva in quanto $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2 > 0$ e neppure suriettiva in quanto $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 < \dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})) = 4$. Di conseguenza T non è neppure invertibile.

e) Riducendo a scala la matrice che ha come colonne le coordinate di K_1, K_2, I_1, I_2 rispetto alla base $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & -1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & i \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Quindi K_1, K_2, I_1, I_2 sono linearmente indipendenti e dunque costituiscono una base di $(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}))$, essendo questo spazio vettoriale di dimensione quattro. Concludiamo che vale $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$, e quindi anche $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) = \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T)$.

f) Il polinomio caratteristico $|\lambda I - M| = \lambda^2(\lambda^2 - 4)$ ha come autovalori $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$. Gli autospazi corrispondenti hanno come basi

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_K, \quad \mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{19}$$

g) L'applicazione lineare T è diagonalizzabile in quanto la matrice M ad essa associata è hermitiana.

3. a) i)

$$\begin{aligned} g(p_2, p_1) &= \left(\int_0^1 p_2(t)dt \right) \left(\int_0^1 p_1(t)dt \right) \\ &= \left(\int_0^1 p_1(t)dt \right) \left(\int_0^1 p_2(t)dt \right) = g(p_1, p_2), \end{aligned} \tag{20}$$

ii)

$$g(p_1, p_2 + p_3) = \left(\int_0^1 p_1(t)dt \right) \left(\int_0^1 [p_2(t) + p_3(t)]dt \right)$$

$$= \left(\int_0^1 p_1(t)dt \right) \left(\int_0^1 p_2(t)dt \right) + \left(\int_0^1 p_1(t)dt \right) \left(\int_0^1 p_3(t)dt \right) = g(p_1, p_2) + g(p_1, p_3), \tag{21}$$

iii)

$$\begin{aligned} g(p_1, kp_2) &= \left(\int_0^1 p_1(t)dt \right) \left(\int_0^1 kp_2(t)dt \right) \\ &= k \left(\int_0^1 p_1(t)dt \right) \left(\int_0^1 p_2(t)dt \right) = kg(p_1, p_2). \end{aligned} \tag{22}$$

b) Gli elementi c_{ij} della matrice C associata al prodotto scalare sono per definizione dati da $c_{ij} = g(p_i, p_j)$. Otteniamo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

c) Il prodotto scalare non è definito positivo in quanto, per esempio, se $p(t) = t - \frac{1}{2}$, $g(p, p) = 0$ anche se $p \neq 0$.

d) Il prodotto scalare è degenere in quanto, ad esempio, se $p(t) = t - \frac{1}{2}$, $g(p, q) = 0$ per ogni $q \in \mathbb{R}_3[t]$, nonostante sia $p \neq 0$.

e) Diagonalizzando la matrice C otteniamo gli autovalori $\lambda_0 = 0$, con molteplicità uguale a due, e $\lambda_1 = \frac{49}{36}$, con molteplicità uguale ad uno. Concludiamo quindi che l'indice di positività del prodotto scalare vale uno, quello di nullità due.

f) Una base per U è data da

$$\mathcal{B}_U = \{q_1(t) = 1, q_2(t) = t^2\}. \tag{24}$$

Imponendo l'ortogonalità di una generico polinomio $p(t) = a + bt + ct^2 \in \mathbb{R}_2[t]$ ai vettori di $\mathcal{B}_U$ otteniamo la condizione $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0$. Quindi $U^\perp$ ha dimensione due e una sua base è data da

$$\mathcal{B}_{U^\perp} = \left\{ r_1(t) = 1 - 3t^2, r_2(t) = t - \frac{3}{2}\, t^2 \right\}. \tag{25}$$

g) Non è vero che $\mathbb{R}_2[t] = U \oplus U^\perp$ in quanto $\dim(U) + \dim(U^\perp) = 4 > \dim(\mathbb{R}_2[t]) = 3$. Riducendo a scala la matrice M che ha come colonne le coordinate di q_1, q_2, r_1, r_2 rispetto alla base canonica $\{p_0, p_1, p_2\}$ otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{26}$$

Siccome M ha rango 3 concludiamo che i vettori di base di U e $U^\dagger$ generano $\mathbb{R}_2[t]$ e quindi $\mathbb{R}_2[t] = U + U^\dagger$.

h) La matrice C asociata al prodotto scalare rispetto alla base canonica $\{p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2, ..., p_n(t) = t^n\}$ ha come righe $C_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n+1}\right)$, $C_1 = \frac{1}{2}\, C_0$,...,$C_n = \frac{1}{n+1}\, C_0$. Quindi $\mathrm{rg}(C) = 1$, da cui $\dim(\mathrm{Ker}(C)) = n$. L'indice di nullità del prodotto scalare g vale allora n. Per calcolare l'indice di positività osserviamo che la matrice C ha traccia positiva, $\mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{i+1}\right)^2 > 0$, e che $\mathrm{Tr}(C_D) = \mathrm{Tr}(U^{-1} C U)$, con U matrice che diagonalizza C, portandola alla forma diagonale C_D. Inoltre gli elementi sulla diagonale di C_D sono dati dagli autovalori $\lambda_0 = 0$ (degenere n volte) e λ_1. Concludiamo quindi che $\mathrm{Tr}(C_D) = \lambda_1 = \mathrm{Tr}(C) > 0$, da cui $\lambda_1 > 0$, vale a dire che l'indice di positività del prodotto scalare vale uno indipendentemente da n.