ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 24/7/2006

1. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4, x_1 - x_2 - x_4 = 0, 2x_1 - x_3 = 0\}, \tag{1}$$

$$V = \{a(1,0,2,1) + b(1,-1,0,1) + c(1,2,6,1), a, b, c \in \mathbf{R}\}. \tag{2}$$

a) Determinare una base di U e V.
b) Determinare una base di $U \cap V$ e $U + V$.

2. a) Determinare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, la risolubilità del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - kx_4 = k, \\ x_1 + (k+1)x_2 + 2x_3 - kx_4 = 2k, \\ x_1 + (k+1)x_2 + (k+2)x_3 - (k-1)x_4 = 2k, \\ x_1 + (k+1)x_2 - (k-2)x_3 - (k+1)x_4 = 3k-2. \end{cases} \tag{3}$$

b) Determinare le soluzioni del sistema per ogni k per cui il sistema è compatibile.

3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Calcolare gli autovalori di A ed una base per ogni autospazio. La matrice è diagonalizzabile?

4. a) Dare la definizione di nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.
b) Si consideri, nello spazio vettoriale $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 ad elementi reali, l'applicazione f, definita, per ogni $X \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, da $f(X) = AX$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dimostrare che f è lineare.
c) Determinare una base per il nucleo e l'immagine di f.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 24/7/2006

1. a) Possiamo anche scrivere

$$U = \{(x_1, x_2, 2x_1, x_1 - x_2) = x_1(1,0,2,1) + x_2(0,1,0,-1),\ x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}. \tag{5}$$

Siccome i vettori $(1,0,2,1)$ e $(0,1,0,-1)$ sono linearmente indipendenti, essi costituiscono una base si U e $\dim(U) = 2$.
Consideriamo ora la matrice che ha per righe i tre vettori che generano V e riduciamola per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Quindi questa matrice ha rango due. Siccome poi i vettori $(1,0,2,1)$ e $(1,-1,0,1)$ sono linearmente indipendenti, ne segue che tali vettori costituiscono una base di V e che $\dim(V) = 2$.
b) Entrambe le basi trovate per U e per V contengono il vettore $(1,0,2,1)$. Inoltre l'altro vettore della base di U non è combinazione lineare dei vettori della base di V e l'altro vettore della base di V non è combinazione lineare dei vettori della base di U. Quindi $U \neq V$ e $\dim(U \cap V) = 1$, con $\{(1,0,2,1)\}$ base di $U \cap V$. Infine abbiamo

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 3. \tag{7}$$

Quindi una base di $U+V$ è formata dai tre vettori $(1,0,2,1)$, $(0,1,0,-1)$ e $(1,-1,0,1)$.

2. a) Riduciamo la matrice associata al sistema completo:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -k & k \\ 1 & k+1 & 2 & -k & 2k \\ 1 & k+1 & k+2 & -k+1 & 2k \\ 1 & k+1 & -k+2 & -k-1 & 3k-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -k & k \\ 0 & 1 & 2 & 0 & k \\ 0 & 1 & k+2 & 1 & k \\ 0 & 1 & -k+2 & -1 & 2k-2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -k & k \\ 0 & 1 & 2 & 0 & k \\ 0 & 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k & -1 & k-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -k & k \\ 0 & 1 & 2 & 0 & k \\ 0 & 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Si può ora vedere che la matrice completa ha rango 4 per $k \neq 2$ e rango 3 per $k = 2$. Inoltre la matrice del sistema omogeneo associato ha sempre rango 3. Ne consegue che il sistema è incompatibile per $k \neq 2$ mentre ha ∞^1 soluzioni per $k = 2$.
b) Per $k = 2$ risolviamo il sistema ridotto ottenuto in precedenza:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \tag{9}$$

da cui $x_4 = -2x_3$, $x_2 = 2 - 2x_3$ e $x_1 = 2$. Quindi l'insieme S delle soluzioni è una retta in $\mathbf{R}^4$:

$$S = \{(-2, 2 - 2x, x, -2x), x \in \mathbf{R}\}. \tag{10}$$

3. Il polinomio caratteristico di A è $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$. Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = 2$ (con molteplicità algebrica 2)e $\lambda_2 = -1$ (con molteplicità algebrica 1). I corrispondenti autospazi sono

$$V_1 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbf{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R} \right\}. \tag{11}$$

Siccome per tutti gli autovalori la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica, ne consegue che la matrice è diagonalizzabile.

4. b) Abbiamo $f(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = f(X) + f(Y)$ e $f(cX) = A(cX) = c(AX) = cf(X)$, con $X, Y \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ e $c \in \mathbf{R}$.
b) Si consideri la seguente base di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$:

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{12}$$

Siccome

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1 + v_3, \\ f(v_2) = v_2 + v_4, \\ f(v_3) = v_1 + v_3, \\ f(v_4) = v_2 + v_4, \end{cases} \tag{13}$$

ne consegue che la matrice associata ad f è data da

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

La matrice M_f ha rango 2, per cui $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ e $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - 2 = 2$. Una base per il nucleo è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \tag{15}$$

mentre una base per l'immagine, ottenuta applicando f ai vettori v_1 e v_2, è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{16}$$