ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 25/2/2008

1. Si consideri l'applicazione $L : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ definita da

$$L(X) = X - [\mathrm{Tr}(AX)]A, \text{ dove } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Dimostrare che L è un'applicazione lineare.
b) Trovare dimensione e una base di $\mathrm{Ker}(L)$ e $\mathrm{Im}(L)$.
c) Dire se L è iniettiva, suriettiva, biiettiva e se è diagonalizzabile.

2. Si consideri, al variare di $k \in \mathbf{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Determinare per quali valori di k le matrici A_k, A_k^2, e A_k^3 sono linearmente indipendenti.

3. Si consideri, al variare di $k \in \mathbf{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

a) Dire per quali valori di k la matrice è invertibile e ove possibile trovare la matrice inversa.
b) Trovare in $\mathbf{R}$ autovalori ed autospazi di A al variare di k.
c) Dire per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile in $\mathbf{R}$.

4. Sia $\mathbf{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a due.
a) Dimostrare che la forma bilineare $\langle\, , \,\rangle : \mathbf{R}_2[t] \times \mathbf{R}_2[t] \to \mathbf{R}$, definita da

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) \tag{4}$$

è un prodotto scalare.
b) Trovare una base di $\mathbf{R}_2[t]$ ortogonale rispetto a tale prodotto scalare.

5. Data $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ suriettiva, provare che esiste $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ tale che $f \circ g$ è uguale alla trasformazione identica in $\mathbf{R}^3$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 25/2/2008

1. a) Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ e $X, Y \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ abbiamo

$$\begin{aligned} L(aX+bY) &= aX+bY-\mathrm{Tr}[A(aX+bY)]A \\ &= aX+bY-[a\mathrm{Tr}(AX)+b\mathrm{Tr}(AY)]A \\ &= a[X-\mathrm{Tr}(AX)A]+b[Y-\mathrm{Tr}(AY)A] \\ &= aL(X)+bL(Y). \end{aligned} \tag{5}$$

b) Costruiamo la matrice M associata all'applicazione lineare L rispetto alla base canonica

$$\mathcal{B}=\left\{E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}. \tag{6}$$

Otteniamo

$$L(E_1)=L\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\-2&-2\end{pmatrix}=-2E_2-2E_3-2E_4,$$

$$\begin{aligned} L(E_2)=L\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-2&-3\\-4&-4\end{pmatrix}=-2E_1-3E_2-4E_3-4E_4, \\ L(E_3)=L\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-2&-4\\-3&-4\end{pmatrix}=-2E_1-4E_2-3E_3-4E_4, \\ L(E_4)=L\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-2&-4\\-4&-3\end{pmatrix}=-2E_1-4E_2-4E_3-3E_4, \end{aligned} \tag{7}$$

da cui

$$M=\begin{pmatrix}0&-2&-2&-2\\-2&-3&-4&-4\\-2&-4&-3&-4\\-2&-4&-4&-3\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Per trovare dimensione e base di nucleo e immagine riduciamo a scala la matrice M:

$$\left|\begin{array}{cccc}0&-2&-2&-2\\-2&-3&-4&-4\\-2&-4&-3&-4\\-2&-4&-4&-3\end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{cccc}-2&-3&-4&-4\\0&-2&-2&-2\\-2&-4&-3&-4\\-2&-4&-4&-3\end{array}\right|$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Quindi $\dim[\mathrm{Im}(L)] = \mathrm{rg}(M) = 4$ e $\dim[\mathrm{Ker}(L)] = \dim[\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})] - \dim[\mathrm{Im}(L)] = 4 - 4 = 0$. Come vettori di base per $\mathrm{Im}(L)$ si possono prendere le 4 matrici corrispondenti alle 4 colonne di M o anche i vettori della base canonica di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$.
c) L'applicazione lineare L è iniettiva ($\dim[\mathrm{Ker}(L)] = 0$), suriettiva ($\mathrm{Im}(L) = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$) e quindi anche biiettiva. È inoltre diagonalizzabile in quanto la matrice M è simmetrica e perciò diagonalizzabile per il teorema spettrale.

2. Calcoliamo innazitutto

$$A_k^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_k^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Le tre matrici A_k, A_k^2, A_k^3 sono linearmente indipendenti se e solo se l'equazione

$$x_1 A_k + x_2 A_k^2 + x_3 A_k^3 = 0 \tag{11}$$

implica $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. L'equazione (11) può essere scritta equivalentemente come

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & 0 & k(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \\ 0 & x_1 + x_2 + x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

oppure come

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ kx_1 + 2kx_2 + 3kx_3 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

La matrice dei coefficienti di tale sistema è data da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 2k & 3k \end{pmatrix} \tag{14}$$

ed ha rango 1 per $k = 0$ e rango 2 per $k \neq 0$. Quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema è uguale a 2 per $k = 0$ e ad 1 per $k \neq 0$. È quindi sempre possibile, per ogni k, trovare combinazioni lineari $x_1 A_k + x_2 A_k^2 + x_3 A_k^3 = 0$ con i coefficienti della combinazione non tutti nulli. Ne consegue che per nessun $k \in \mathbf{R}$ le matrici sono linearmente indipendenti.

3. a) Siccome $\det(A) = 2(1-k^2)$, la matrice A è invertibile per $k \neq \pm 1$. In tal caso possiamo calcolare la matrice inversa, ad esempio usando il metodo di Gauss, risovendo simultaneamente i 3 sistemi $AX^1 = e_1$, $AX^2 = e_2$, $AX^3 = e_3$, con X^1, X^2, X^3 vettori colonna (incognite dei 3 sistemi sopra scritti), con $X = A^{-1}$ ed e_1, e_2, e_3 vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$. Applichiamo quindi il metodo di Gauss alla matrice A e alla matrice identica, che contiene i termini noti dei sistemi che ci interessano:

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \to \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-k^2 & -k & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$\to \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & -k & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right|$$

$$\to \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-k^2} & \frac{k}{2(1-k^2)} & -\frac{k}{1-k^2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & -k & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right|, \tag{15}$$

da cui

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-k^2} & \frac{k}{2(1-k^2)} & -\frac{k}{1-k^2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{k}{1-k^2} & -\frac{1}{2(1-k^2)} & \frac{1}{1-k^2} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

b)-c) Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)[(\lambda - 1)^2 - k^2], \tag{17}$$

per cui gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + k$, $\lambda_3 = 1 - k$.

Per $k \neq 0, \pm 1$ abbiamo tre autovalori reali e distinti, per cui la matrice è diagonalizzabile in $\mathbf{R}$. Basi per i tre autospazi sono date da

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 1 - k^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \ \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \ \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{18}$$

Per $k = 1$ l'autovalore $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ha molteplicità algebrica uguale a due, mentre il corrispondente autospazio ha come base

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{19}$$

Quindi la molteplicità geometrica di questo autovalore è uguale ad 1 e inferiore alla molteplicità algebrica e la matrice non è diagonalizzabile. L'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_3 = 1 - k = 0$ è come nell'equazione (18).

Per $k = -1$ l'autovalore $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_3 = 2$ ha molteplicità algebrica uguale a due, mentre il corrispondente autospazio ha come base

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{20}$$

Quindi la molteplicità geometrica di questo autovalore è uguale ad 1 e inferiore alla molteplicità algebrica e la matrice non è diagonalizzabile. L'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = 1 + k = 0$ è come nell'equazione (18).

Per $k = 0$ l'autovalore $\lambda_0 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ha molteplicità algebrica uguale a due, mentre il corrispondente autospazio ha come base

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{21}$$

L'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = 2$ è come nell'equazione (18). In questo caso la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è uguale a 3 e per ogni autovalore la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica. La matrice è quindi diagonalizzabile.

4. a) Data una coppia di vettori p e q, $\langle p, q\rangle$ associa a tale coppia uno scalare. Valgono le proprietà del prodotto scalare:
(i) Per ogni $p, q \in \mathbf{R}_2[t]$ abbiamo

$$\begin{aligned} \langle p, q\rangle &= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) \\ &= q(0)p(0) + q(1)p(1) + q(2)p(2) = \langle q, p\rangle. \end{aligned} \tag{22}$$

(ii) Dati $p, q, r \in \mathbf{R}_2[t]$, allora

$$\begin{aligned} \langle p, q+r\rangle &= p(0)(q+r)(0) + p(1)(q+r)(1) + p(2)(q+r)(2) \\ &= p(0)[q(0)+r(0)] + p(1)[q(1)+r(1)] + p(2)[q(2)+r(2)] \\ &= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(0)r(0) + p(1)r(1) + p(2)r(2) \\ &= \langle p, q\rangle + \langle p, r\rangle. \end{aligned} \tag{23}$$

iii) Per ogni $p, q \in \mathbf{R}_2[t]$ e per ogni $c \in \mathbf{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \langle p, cq\rangle &= p(0)(cq)(0) + p(1)(cq)(1) + p(2)(cq)(2) \\ &= p(0)cq(0) + p(1)cq(1) + p(2)cq(2) \\ &= c[p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)] = c\langle p, q\rangle. \end{aligned} \tag{24}$$

b) Applicando il metodo di Gram-Schmidt, otteniamo la base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3\}$, a partire dalla base canonica di $\mathbf{R}_2[t]$, $\{v_1 = 1, v_2 = t, v_3 = t^2\}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = 1, \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = t - 1 \\ w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 = t^2 - 2t + \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{25}$$

5. Abbiamo che $\dim[\mathrm{Ker}(f)] = \dim(\mathbf{R}^4) - \dim[\mathrm{Im}(f)] = 4 - 3 = 1$. Consideriamo quindi una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbf{R}^4$ con $\{v_1\}$ base di $\mathrm{Ker}(f)$. Dimostriamo che $\{w_2, w_3, w_4\}$, con $w_i = f(v_i)$ $(i = 2, 3, 4)$, è una base di $\mathrm{Im}(f)$. Infatti $a_2w_2 + a_3w_3 + a_4w_4 = a_2f(v_2) + a_3f(v_3) + a_4f(v_4)$ $= f(a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4) = 0$ se e solo se $a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \in \mathrm{Ker}(f)$ se e solo se $a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = a_1v_1$ se e solo se $a_1v_1 - a_2v_2 - a_3v_3 - a_4v_4 = 0$.

Poiché $\{v_i\}$ è una base, questo è vero se e solo se $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Un'applicazione lineare è univocamente definita dalla sua azione sugli elementi di una base e basta quindi definire $g(w_i) = v_i$ $(i = 2, 3, 4)$ per verificare $f(g(w_i)) = w_i$ per ogni $i = 2, 3, 4$, cioé $f \circ g$ è l'applicazione identica in $\mathbf{R}^3$.