ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 25/7/2005

1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita, nella base $\{e_1, e_2, e_3\}$, da
$$f(e_1) = e_1 - e_2, \quad f(e_2) = -e_1 + e_2, \quad f(e_3) = e_1 + e_2 - e_3. \qquad (1)$$

   a) Scrivere la matrice associata all'applicazione lineare f.
   b) Trovare autovalori ed autovettori di f. È l'applicazione lineare diagonalizzabile?
   c) Scrivere una base per il nucleo e una per l'immagine di f.
   d) Quante soluzioni ha il sistema lineare $f^{100}(v) = v$, con $v \in \mathbf{R}^3$?

2. Si consideri il sistema lineare dato dalle equazioni
$$\begin{cases} (1-t)x + 2y - tz = t, \\ x - ty + 2z = 1, \end{cases} \qquad (2)$$
   con t parametro reale. Studiare la dimensione dell'insieme delle soluzioni al variare di t.

3. Descrivere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, nucleo ed immagine dell'applicazione lineare associata alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k & k & 4 \\ 3 & 3 & 3k \end{pmatrix}. \qquad (3)$$
   Risolvere il sistema lineare $Av = b$, con $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $(x, y, z \in \mathbf{R})$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Dare la definizione di somma e somma diretta di due sottospazi vettoriali.

   Siano v_1 e v_2 due vettori di $\mathbf{R}^2$ diversi dal vettore nullo e si assuma che non esista nessun numero reale c tale che $cv_1 = v_2$. Dimostrare che in tal caso v_1 e v_2 costituiscono una base di $\mathbf{R}^2$ e che $\mathbf{R}^2$ è somma diretta dei sottospazi generati da v_1 e v_2.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 25/7/2005

1. a)

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

b) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2)$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ ed i corrispondenti autovettori sono dati da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

L'applicazione f è diagonalizzabile in quanto il numero di autovalori reali distinti coincide con la dimensione dello spazio vettoriale.
c) Una base del nucleo è data da $\{v_1\}$, una base dell'immagine da $\{v_2, v_3\}$.
d) Il sistema proposto è l'equazione agli autovalori della matrice A^{100} per l'autovalore $\lambda = 1$. Gli autovalori di A^{100} sono dati da 0^{100}, 1^{100} e 2^{100}. Poiché tutti gli autovalori sono distinti ne consegue che tutti gli autospazi sono di dimensione uno, per cui il sistema ha ∞^1 soluzioni.

2. La matrice dei coefficienti del sistema omogeneo associato è

$$\begin{pmatrix} 1-t & 2 & -t \\ 1 & -t & 2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Tale matrice ha al massimo rango uguale a due. Il rango della matrice è uguale ad uno quando i suoi minori di ordine due,

$$\begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 1 & -t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -t \\ -t & 2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

hanno tutti determinante nullo. Questo accade solamente quando $t = 2$. In tal caso la matrice completa è data da

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

ed ha rango due. Quindi il sistema non è risolubile per $t = 2$. Invece per $t \neq 2$ il sistema è risolubile (rango matrice omogenea associata uguale al rango della matrice completa) e la dimensione d dell'insieme delle soluzioni è data dal numero di incognite n meno il rango r della matrice, cioé $d = n - r = 3 - 2 = 1$.

3. Poiché la matrice A ha due colonne uguali, allora il rango di A è minore di 3. Esaminando i minori della matrice vediamo che per $k \neq 2$ rango$(A) = 2$, mentre per $k = 2$ rango$(A) = 1$.

   Per $k = 2$ il nucleo di A ha allora dimensione 2 ed è dato dall'equazione $x + y + 2z = 0$ (equazione di un piano in $\mathbf{R}^3$ passante per l'origine). In questo caso una base per Ker(A) è data dai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$. Una base per Im$(A)$ è invece data da $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Per $k \neq 2$ il nucleo ha dimensione 1 ed è dato dalle equazioni $z = 0$, $x + y = 0$ (retta in $\mathbf{R}^3$ passante per l'origine). Una base per Ker(A) è data da $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'immagine di A ha dimensione 2 ed è generata dai vettori $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$ e $w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3k \end{pmatrix}$.

   Consideriamo ora la matrice

   $$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ k & k & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3k & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

   Per $k = 2$, rango$(A^\star) = 2 \neq$ rango$(A) = 1$, per cui il sistema $Av = b$ non ammette soluzioni. Per $k \neq 2$, $k \neq -1/3$, rango$(A^\star) = 3 \neq$ rango$(A) = 2$, per cui di nuovo il sistema non ammette soluzioni. Per $k = -1/3$, rango$(A^\star) =$ rango$(A) = 2$, per cui il sistema ammette soluzioni. In tal caso il sistema si riduce a $z = 2/7$, $x + y = 3/7$, per cui l'insieme delle soluzioni è dato da

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3/7 - x \\ 2/7 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbf{R} \right\}, \tag{10}$$

che possiamo anche scrivere come

$$S = x \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbf{R} \right\}, \tag{11}$$

evidenziando cioé come l'insieme S sia una retta non passante per l'origine parallela a $\mathrm{Ker}(A)$.

4. I vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti in quanto $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$ implica che $\alpha = \beta = 0$. Siccome $V = \mathbf{R}^2$ ha dimensione 2, allora $\{v_1, v_2\}$ costituisce una base di $\mathbf{R}^2$. Quindi ogni vettore $v \in \mathbf{R}^2$ può essere scritto come somma di un vettore αv_1 in V_1 e di un vettore βv_2 in V_2, dove V_1 e V_2 denotano i sottospazi generati da v_1 e v_2. Dato che $\{v_1, v_2\}$ è una base, la scomposizione $c = \alpha v_1 + \beta v_2$ è univoca, per cui $V = V_1 \oplus V_2$.