ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 25/11/2013

1. a) Calcolare autovalori ed autospazi della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$
b) La matrice è diagonalizzabile?
c) Trovare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare $A^2X = -9X$, con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

2. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$
si consideri l'applicazione $T : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, definita, per ogni $X \in \mathcal{M}_{2,2}$, da $T(X) = AX - XA$.
a) Dimostrare che T è lineare.
b) Determinare $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
c) Determinare se $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

3. Sia data l'applicazione $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definita, per ogni $X = (x, y, z), X' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, da
$$g(X, X') = xx' + 2xy' + 2yx' + 4yy' + zz'. \tag{3}$$
a) Dimostrare che g è un prodotto scalare.
b) Tale prodotto scalare è definito positivo? È non degenere?
c) Scrivere la matrice associata a tale prodotto scalare rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
d) Calcolare l'indice di positività e l'indice di nullità del prodotto scalare g.
e) Determinare la dimensione e una base del complemento ortogonale $W^\perp$ (rispetto al prodotto scalare g) di $W = \mathrm{Span}(1, -1, 0)$.
f) Determinare se $\mathbb{R}^3 = W + W^\perp$ e se $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 25/11/2013

1. a) Gli autovalori sono $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$ e i corrispondenti autospazi hanno come basi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{4}$$

b) La matrice è sicuramente diagonalizzabile essendo reale simmetrica.
c) Gli autovalori di A^2 sono i quadrati degli autovalori di A (con gli stessi autovettori), per cui -9 non è autovalore di A^2 e quindi il sistema ammette solo la soluzione banale.

2. a) Per ogni $X, Y \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ e per ogni $c \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\begin{aligned} T(X+Y) &= A(X+Y) - (X+Y)A = AX + AY - XA - YA \\ &= AX - XA + AY - YA = T(X) + T(Y), \qquad (5) \\ T(cX) &= A(cX) - (cX)A = c(AX) - c(XA) \\ &= c(AX - XA) = cT(X). \qquad (6) \end{aligned}$$

b) Data una generica matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, otteniamo

$$AX - XA = \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Quindi $X \in \mathrm{Ker}(T)$ se e solo se $a = d$ e $b = c$. Concludiamo che $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$ e che una base per il nucleo è data da

$$\mathcal{B}_K = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{8}$$

Abbiamo poi $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 4 - 2 = 2$. Una base per l'immagine è data da

$$\mathcal{B}_I = \left\{ E_3 = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{9}$$

c) I 4 vettori E_1, E_2, E_3, E_4 sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base per $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, che perciò è somma diretta del nucleo e dell'immagine di T.

3. a) Risulta immediato verificare che, fissato $X = \bar{X}$, $g(\bar{X}, X')$ è una funzione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$. La stessa condiderazione vale fissando $X' = \bar{X}'$ e considerando $g(X, \bar{X}')$. Concludiamo che $g(X, X')$ è bilineare. La simmetria richiesta per i prodotti scalari, $g(X, X') = g(X', X)$, è poi facilmente verificata.

b) Il prodotto scalare non è definito positivo in quanto

$$g(X,X) = x^2 + 4x^2y^2 + 4y^2 + z^2 = (x+2y)^2 + z^2 \tag{10}$$

si annulla anche se $X \neq 0$; basta infatti considerare $\bar{X} = (2,-1,0)$. Il prodotto scalare non è neppure definito positivo in quanto il vettore $\bar{X}$ sopra definito è ortogonale a tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ senza essere uguale al vettore nullo.

c)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

d) Diagonalizzando la matrice C otteniamo il polinomio caratteristico $p_C(\lambda) = \lambda(\lambda-5)(\lambda-1)$. Gli autovalori sono quindi dati da $0, 1, 5$, tutti con molteplicità uguale ad uno. Concludiamo quindi che l'indice di positività del prodotto scalare è uguale ad due, quello di nullità ad uno.

e) Imponendo l'ortogonalità di un generico vettore $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ a $(1,-1,0)$ otteniamo la condizione $x + 2y = 0$. Quindi $W^\perp = \mathrm{Span}((2,-1,0),(0,0,1))$.

f) Vale $\mathbb{R}^3 = W + W^\perp$ e $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$ in quanto i tre vettori

$$\{(1,-1,0),(2,-1,0),(0,0,1)\}$$

costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.