ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 26/2/2009

1. Data l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, definita, per ogni $X \in \mathbf{R}^4$, da

$$F(X) = F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_2 + x_4 - x_1 \\ x_1 - x_3 - x_4 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

a) determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine di $F$,
b) dimostrare che $\mathbf{R}^4$ è somma diretta del nucleo e dell'immagine di $F$.

2. a) Si determinino, al variare di $k \in \mathbf{R}$, autovalori ed autospazi di

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}. \tag{2}$$

b) Discutere la diagonalizzabilità di $A$ al variare del parametro $k$.

3. Sia $\mathbf{R}_3[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a tre. Si consideri il sottoinsieme $U$ definito nel modo seguente:

$$U = \{p \in \mathbf{R}_3[t] \mid p(1) = p(-1) = 0\}. \tag{3}$$

a) Dimostrare che $U$ è un sottospazio di $\mathbf{R}_3[t]$.
b) Determinare una base di $U$.
c) Determinare una base di $U + W$ e una base di $U \cap W$, dove $W$ è il sottospazio

$$W = \{p \in \mathbf{R}_3[t] \mid p(0) = 0\}. \tag{4}$$

4. Si consideri, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, il sistema

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1, \\ x + \alpha y + z = \beta, \\ x + y + \alpha z = \beta. \end{cases} \tag{5}$$

Si dica per quali valori dei parametri il sistema è risolubile e, nel caso in cui lo sia, si trovi la dimensione dell'insieme delle soluzioni e si risolva il sistema.

5. Sia $\mathbf{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a due. Si consideri l'applicazione $A_k : \mathbf{R}_2[t] \to \mathbf{R}^3$ definita, $\forall p \in \mathbf{R}_2[t]$, da

$$A_k(p) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(k) \\ p(1) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

a) Dimostrare che $A_k$ è lineare.
b) Dire per quali valori del parametro $k$ l'applicazione $A_k$ è un isomorfismo.

1. a) Un vettore $X \in \mathbf{R}^4$ appartiene al nucleo di $F$ se è soluzione del sistema $F(X) = 0$, cioé

$$\begin{cases} x_3 - x_2 = 0, \\ x_2 + x_4 - x_1 = 0, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \tag{7}$$

da cui

$$\begin{cases} x_2 = x_3, \\ x_1 = x_3 + x_4. \end{cases} \tag{8}$$

I vettori del Ker($F$) sono quindi della forma

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

Una base del Ker($F$) è quindi ottenuta ponendo prima $\alpha = 1, \beta = 0$ e poi $\alpha = 0, \beta = 1$:

$$\mathcal{B}_K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{10}$$

Quindi $\dim[\mathrm{Im}(F)] = \dim(\mathbf{R}^4) - \dim[\mathrm{Ker}(F)] = 4 - 2 = 2$. Una base per l'immagine è ad esempio costituita dai vettori

$$\left\{ F(E_1) = F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F(E_2) = F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{11}$$

b) Per dimostrare che $\mathbf{R}^4 = \mathrm{Ker}(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$ basta verificare che $\mathrm{Ker}(F) \cap \mathrm{Im}(F)$ contiene solo il vettore nullo. Un generico vettore in $\mathrm{Im}(F)$ è della forma

$$\begin{pmatrix} -\beta \\ \beta-\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha,\beta \in \mathbf{R}. \tag{12}$$

Imponendo ora che un tale vettore appartenga anche a $\mathrm{Ker}(F)$, cioé che $x_2 = x_3$ e $x_1 = x_3 + x_4$, otteniamo

$$\begin{cases} \beta-\alpha = \alpha, \\ -\beta = \alpha+\beta, \end{cases} \tag{13}$$

da cui $\alpha = \beta = 0$.

2. a) Il polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda-3)[(\lambda-k)^2 - 1] \tag{14}$$

ha come radici $3, k+1, k-1$.

Per $k \neq 2, 4$ le tre radici sono distinte. I tre autovalori sono quindi $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = k+1$, $\lambda_3 = k-1$. I corrispondenti autospazi $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, V_{\lambda_3}$ sono dati da

$$V_3 = \left\{ a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{R} \right\}, \tag{15}$$

$$V_{k+1} = \left\{ b \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{k-2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbf{R} \right\}, \tag{16}$$

$$V_{k-1} = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbf{R} \right\}. \tag{17}$$

Per $k = 2$ i due autovalori sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$ e i corrispondenti autospazi sono dati da

$$V_3 = \left\{ a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{R} \right\}, \tag{18}$$

$$V_1 = \left\{ b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbf{R} \right\}. \tag{19}$$

Per $k = 4$ i due autovalori sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 5$ e i corrispondenti autospazi sono dati da

$$V_3 = \left\{ a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R} \right\}, \tag{20}$$

$$V_5 = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbf{R} \right\}. \tag{21}$$

b) Per $k \neq 2, 4$ gli autovalori hanno tutti molteplicità algebrica uguale ad uno e sono in numero uguale al grado del polinomio caratteristico. Quindi $A$ è diagonalizzabile.

Per $k = 2$ la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda_1 = 3$ vale due ed è maggiore della corrispondente molteplicità geometrica che vale 1. Quindi $A$ non è diagonalizzabile.

Per $k = 4$ le molteplicità algebriche dei due autovalori sono uguali alle rispettive molteplicità geometriche e la somma delle molteplicità algebriche è uguale al grado del polinomio caratteristico. Quindi $A$ è diagonalizzabile.

3. a) Se $p, q \in U$, cioé $p(1) = p(-1) = 0$, $q(1) = q(-1) = 0$, abbiamo $p+q \in U$ e $cp \in U$, per ogni $c \in \mathbf{R}$. Infatti $(p+q)(1) = p(1)+q(1) = 0$, $(p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0$, $(cp)(1) = cp(1) = 0$, $(cp)(-1) = cp(-1) = 0$.

   b) Scriviamo un generico $p \in \mathbf{R}_3[t]$ nella forma $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Le condizioni $p(1) = p(-1) = 0$ implicano $a + b + c + d = 0$ e $-a + b - c + d = 0$, da cui $a + c = 0$, $b + d = 0$. Quindi

$$U = \{p(t) = a(t^3 - t) + b(t^2 - 1) \mid a, b \in \mathbf{R}\} \tag{22}$$

   e una base di $U$ è data da

$$\mathcal{B}_U = \{p_1(t) = t^3 - t, p_2(t) = t^2 - 1\}. \tag{23}$$

c) Affinché $p(t) = at^3+bt^2+ct+d$ appartenga a $W$ deve valere $p(0) = 0$, da cui $d = 0$. Una base di $W$ è quindi data da

$$\mathcal{B}_W = \{q_1(t) = t^3, q_2(t) = t^2, q_3(t) = t\}. \tag{24}$$

I vettori delle coordinate di $q_1$, $q_2$, $q_3$, $p_1$, $p_2$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}_3[t]$, cioé $\mathcal{B} = \{t^3, t^2, t, 1\}$, sono dati da

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

La matrice che ha $Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2$ come colonne è già ridotta a scala. Quindi $\dim(U + W) = 4$ e come base di $U + W$ possiamo prendere la base canonica di $\mathbf{R}_3[t]$.

Per quanto riguarda $U \cap W$, osserviamo prima di tutto che

$$\dim(U\cap W) = \dim(U)+\dim(W)-\dim(U+W) = 2+3-4 = 1. \tag{26}$$

Possiamo trovare una base di $W \cap W$ imponendo che i polinomi $p(t) = at^3+bt^2+ct+d$ soddisfino sia $p(1) = p(-1) = 0$ che $p(0) = 0$, ottenendo $c = -a$, $b = d = 0$. Quindi

$$\mathcal{B}_{U\cap W} = \{t^3 - t\}. \tag{27}$$

4. Riduciamo a scala la matrice $A^\star = A|b$, dove $A$ è la matrice dei coefficienti del sistema e $b$ la matrice dei termini noti (per convenienza modifichiamo l'ordine delle equazioni):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 & 1-\alpha\beta \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha+2)(\alpha-1) & 1-\alpha\beta \end{array}\right). \tag{28}$$

Per $\alpha \neq -2, 1$, abbiamo $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 3$, per cui il sistema è risolubile e ammette un'unica soluzione:

$$y = z = \frac{\alpha\beta - 1}{(\alpha+2)(\alpha-1)}, \quad x = \frac{1+\alpha-2\beta}{(\alpha+2)(\alpha-1)}. \tag{29}$$

Per $\alpha = 1$, $\beta \neq 1/\alpha = 1$, $\mathrm{rg}(A) = 1 < \mathrm{rg}(A^\star) = 2$, per cui, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema non è risolubile.

Per $\alpha = 1$, $\beta = 1$, abbiamo $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 1$ e quindi l'insieme $W$ delle soluzioni ha dimensione due. Aggiungendo all'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato una soluzione particolare del sistema completo otteniamo

$$W = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ a, b \in \mathbf{R} \right\}. \tag{30}$$

Per $\alpha = -2$, $\beta \neq 1/\alpha = -1/2$, abbiamo $\mathrm{rg}(A) = 2 < \mathrm{rg}(A^\star) = 3$, per cui il sistema non è risolubile.

Per $\alpha = -2$, $\beta = -1/2$, abbiamo $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 2$ e quindi l'insieme $W$ delle soluzioni ha dimensione uno. Aggiungendo all'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato una soluzione particolare del sistema completo otteniamo

$$W = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ a \in \mathbf{R} \right\}. \tag{31}$$

5. a) Dati due qualsiasi polinomi $p, q \in \mathbf{R}_2[t]$ e due qualsiasi numeri reali $a, b$ otteniamo

$$A_k(ap+bq) = \begin{pmatrix} (ap+bq)(-1) \\ (ap+bq)(k) \\ (ap+bq)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap(-1)+bq(-1) \\ ap(k)+bq(k) \\ ap(1)+bq(1) \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(k) \\ p(1) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} q(-1) \\ q(k) \\ q(1) \end{pmatrix} = aA_k(p) + bA_k(q). \qquad (32)$$

b) Affinché un polinomio $p$ appartenga al nucleo di $A_k$ deve risultare $p(-1) = p(k) = p(1) = 0$. Se $k \neq -1, 1$, l'unico polinomio $p(t)$ di grado minore od uguale a due che si annulla per tre valori distinti di $t$ è il polinomio nullo. Quindi in questo caso $A_k$ è iniettiva, cioé $\dim[\mathrm{Ker}(A_k)] = 0$. Inoltre $\dim[\mathrm{Im}(A_k)] = \dim(\mathbf{R}_2[t]) - \dim[\mathrm{Ker}(A_k)] = 3$, da cui $\mathrm{Im}(A_k) = \mathbf{R}_3$. Ne concludiamo che per $k \neq \pm 1$ l'applicazione $A_k$ è iniettiva e suriettiva e quindi è un isomorfismo.

Per $k = -1$ oppure $k = 1$ l'applicazione $A_k$ non è iniettiva e quindi non costituisce un isomorfismo. Ad esempio il polinomio $p(t) = (t+1)(t-1)$ appartiene al nucleo di $A_{-1}$ (e di $A_1$) ma è diverso dal polinomio nullo.