ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 26/7/2004

1. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$
Se ne determino autovalori ed autovettori e si scriva una trasformazione di similitudine che la diagonalizza.

2. Si enunci il teorema di Hamilton-Cayley. Utilizzando tale teorema, si calcoli A^{31}, dove
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

3. Sia data in $\mathbf{C}^3$ l'applicazione lineare definita da
$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 - ie_2 + e_3 \\ f(e_2) = ie_1 + e_2 + e_3, \\ f(e_3) = ie_1 + e_2 + e_3, \end{cases} \tag{3}$$
dove $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è una base di $\mathbf{C}^3$. Si scriva la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ e si trovi una base per il nucleo e una base per l'immagine di f.

4. Stabilire se, per qualche valore del parametro reale k, è diagonalizzabile la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ k+1 & k^2-1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

5. Nello spazio vettoriale V dei polinomi $p(t)$ di grado non superiore al terzo a coefficienti reali, si consideri l'applicazione f che ad ogni polinomio $p(t)$ associa $p(t+1)$. Stabilire se f è lineare e se f è invertibile. Nel caso in cui sia lineare, determinare la matrice associata ad f.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 26/7/2004

1. Gli autovalori λ si trovano imponendo

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0. \tag{5}$$

Abbiamo

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2). \tag{6}$$

Gli autovettori sono quindi $\lambda_1 = 1$ (molteplicità 2) e $\lambda_2 = -2$ (molteplicità 1). Gli autovettori corrispondenti all'autovalore 1 si trovano risolvendo

$$A\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x} = \mathbf{x}, \tag{7}$$

con $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Basta risolvere l'unica equazione

$$x = y + z, \tag{8}$$

che ha come soluzione un spazio di dimensione 2. Come base (ortonormale) di tale spazio possiamo scegliere

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Consideriamo ora l'autovalore $\lambda_2 = -2$: il sistema di equazioni lineari che dobbiamo risolvere è

$$\begin{cases} y + z = -2x, \\ x - z = -2y, \end{cases} \tag{10}$$

che ha come soluzione normalizzata

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Una trasformazione di similitudine che diagonalizza A è

$$A' = S^T A S, \tag{12}$$

dove la matrice di trasformazione S ha come colonne i tre autovettori normalizzati trovati:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Abbiamo

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

2. Siccome gli autovalori di A sono $\lambda = \pm 1$, il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 1$; il teorema di Hamilton-Cayley dice che $A^2 = I$, da cui $A^{31} = AA^{30} = A$.

3. La matrice M associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è data da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

   Abbiamo rango$(M) = 2$, per cui il nucleo di f ha dimensione 1. Ponendo $Mx = 0$, con $x \in \mathbf{C}^3$, troviamo una base di Ker(f): $v_1 = \{0, 1, -1\}$. Una base di Im(f) può qui essere ottenuta applicando f a due vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{C}^3$ ortogonali a v_1, ad esempio a $v_2 = (1, 0, 0)$ e a $v_3 = (0, 1, 1)$. Abbiamo $w_2 = f(v_2) = (1, -i, 1)$ e $w_3 = f(v_3) = (2i, 2, 2)$. Quindi una base di Im$(f)$ è costituita da $\{w_2, w_3\}$.

4. Poiché la matrice è triangolare, gli autovalori sono sulla diagonale: $\lambda_1 = 1$ (con molteplicità 2) e $\lambda_2 = 3$ (con molteplicità 1). La matrice è diagonalizzabile se la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore λ_1 è uguale a 2. Calcolo

$$\text{rango}(A - \lambda_1 I) = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ k+1 & k^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

ed impongo che sia uguale ad 1, cioé che

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ k+1 & k^2-1 \end{pmatrix} = 0. \tag{17}$$

Questo è vero per $k = -1$ e per $k = 2$. Perciò per tali valori la dimensione dell'autospazio associato a λ_1 è uguale a 2 e quindi la matrice è diagonalizzabile.

5. Siano $a(t) = \sum_{n=0}^{3} a_n t^n$ e $b(t) = \sum_{n=0}^{3} b_n t^n$, con a_n, b_n numeri reali, due elementi di V. Per definizione

$$f[a(t)] = \sum_{n=0}^{3} a_n (t+1)^n, \quad f[b(t)] = \sum_{n=0}^{3} b_n (t+1)^n. \tag{18}$$

Analogamente, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, poiché

$$\alpha a(t) + \beta b(t) = \sum_{n=0}^{3} (\alpha a_n + \beta b_n) t^n, \tag{19}$$

abbiamo

$$f[\alpha a(t) + \beta b(t)] = \sum_{n=0}^{3} (\alpha a_n + \beta b_n)(t+1)^n$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{3} a_n (t+1)^n + \beta \sum_{n=0}^{3} b_n (t+1)^n = \alpha f[a(t)] + \beta f[b(t)]. \tag{20}$$

Se ne deduce che f è un operatore lineare. Gli si può quindi associare una matrice A, ad esempio rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$. Siccome

$$f(1) = 1, \; f(t) = t+1, \; f(t^2) = t^2+2t+1, \; f(t^3) = t^3+3t^3+3t+1, \tag{21}$$

la matrice A risulta essere:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Poiché $\det(A) = 1 \neq 0$, A è invertibile e quindi anche l'operatore f a cui A è associata risulta essere invertibile.