ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 28/7/2008

1. a) Calcolare autovalori ed autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   b) La matrice è diagonalizzabile?

2. Determinare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ kx - ky + z = 0, \\ x + k^2 z = 1. \end{cases} \tag{2}$$

   Dove possibile, risolvere il sistema usando il metodo di Cramer.

3. In $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ si consideri l'applicazione $F : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, definita da

$$F(A) = {}^tA. \tag{3}$$

   a) Verificare che F è lineare.
   b) Dire se F è invertibile e, in caso positivo, determinare F^{-1}.
   c) Determinare autovalori ed autospazi di F.

4. Sia $\mathbf{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a due.
   a) Dimostrare che la forma bilineare $\langle\, , \rangle : \mathbf{R}_2[t] \times \mathbf{R}_2[t] \to \mathbf{R}$, definita da

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) \tag{4}$$

   è un prodotto scalare.
   b) Dire se tale prodotto scalare è definito positivo.

5. Data $A \in \mathcal{M}_{6,6}(\mathbf{C})$, con polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = \lambda^6 - \lambda^2$, trovare il rango di A affinché la matrice sia diagonalizzabile.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 28/7/2008

1. a) Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, entrambi con molteplicità algebrica uguale a 2, e i corrispondenti autospazi hanno come basi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{5}$$

   b) La matrice è diagonalizzabile in quanto la molteplicità algebrica degli autovalori coincide con quella geometrica e la somma delle molteplicità è uguale a 4. Si noti come questa conclusione fosse evidente dall'inizio essendo la matrice simmetrica.

2. La matrice dei coefficienti del sistema è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ k & -k & 1 \\ 1 & 0 & k^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

   Siccome $\det(A) = k - 1$, la matrice ha rango massimo (uguale a 3) per $k \neq 1$. In tal caso il sistema possiede un'unica soluzione, che può essere trovata mediante il metodo di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -k & 1 \\ 1 & 0 & k^2 \end{vmatrix}}{k-1} = \frac{-k^3 + k - 1}{k - 1}, \tag{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k^2 \end{vmatrix}}{k-1} = \frac{-k^3 + k}{k - 1}, \tag{8}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ k & -k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{k-1} = \frac{k}{k - 1}. \tag{9}$$

Per $k = 1$, rango$(A) = 2$, mentre rango$(A^\star) = 3$, dove

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ k & -k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k^2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Quindi per $k = 1$ il sistema non è risolubile per il teorema di Rouché-Capelli.

3. a) Dati $A, B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, abbiamo

$$F(\alpha A + \beta B) = {}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha {}^t A + \beta {}^t B = \alpha F(A) + \beta F(B). \tag{11}$$

b) Siccome $F^2(A) = {}^t({}^t A) = A$, F è invertibile e $F^{-1} = F$.
c) La matrice associata ad F rispetto alla base

$$\left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{12}$$

è data da

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

ed ha come autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. I corrispondenti autospazi hanno rispettivamente dimensione 3 ed 1 e corrispondono ai sottospazi delle matrici 2×2 simmetriche ed antisimmetriche.

4. a) Data una coppia di vettori p e q, $\langle p, q \rangle$ associa a tale coppia uno scalare. Valgono le proprietà del prodotto scalare:
(i) Per ogni $p, q \in \mathbf{R}_2[t]$ abbiamo

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= p(0)q(0) + p(1)q(1) \\ &= q(0)p(0) + q(1)p(1) = \langle q, p \rangle. \end{aligned} \tag{14}$$

(ii) Dati $p, q, r \in \mathbf{R}_2[t]$, allora

$$\langle p, q + r \rangle = p(0)(q + r)(0) + p(1)(q + r)(1)$$

$$= p(0)[q(0) + r(0)] + p(1)[q(1) + r(1)]$$
$$= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(0)r(0) + p(1)r(1)$$
$$= \langle p, q\rangle + \langle p, r\rangle. \tag{15}$$

iii) Per ogni $p, q \in \mathbf{R}_2[t]$ e per ogni $c \in \mathbf{R}$ abbiamo

$$\langle p, cq\rangle = p(0)(cq)(0) + p(1)(cq)(1)$$
$$= p(0)cq(0) + p(1)cq(1)$$
$$= c[p(0)q(0) + p(1)q(1)] = c\langle p, q\rangle. \tag{16}$$

b) Possiamo trovare polinomi $p \in \mathbf{R}_2[t]$ diversi dal polinomio nullo e tali che $p(0) = p(1) = 0$, ad esempio $p(t) = t(t-1) = t^2 - t$. In questo caso, $\langle p, p\rangle = p(0)^2 + p(1)^2 = 0$ e quindi il prodotto scalare assegnato non è definito positivo.

5. Gli autovalori della matrice sono dati dagli zeri del polinomio caratteristico: $0, \pm 1, \pm i$. L'unico autovalore che può essere non regolare è 0, in quanto ha molteplicità algebrica maggiore di 1 (uguale a 2). Affinché la matrice A sia diagonalizzabile, basta quindi che anche la molteplicità geometrica di tale autovalore, cioé la dimensione del nucleo della matrice, sia uguale a 2. Quindi la matrice deve avere rango $6 - 2 = 4$ per essere diagonalizzabile.