ALGEBRA LINEARE – PROVA SCRITTA DEL 30/1/2009

1. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$: $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (1,1,-1)$, $u_3 = (1,1,3)$, $w_1 = (2,3,-1)$, $w_2 = (1,2,2)$, $w_3 = (1,1,-3)$.
a) Trovare dimensioni e basi dei sottospazi $U = \mathrm{Span}(u_1,u_2,u_3)$ e $W = \mathrm{Span}(w_1,w_2,w_3)$.
b) Trovare dimensione e base di $U \cap W$.

2. Sia $V$ uno spazio vettoriale su un corpo $K$ e siano $L, M : V \to K$ applicazioni lineari. Dire se è vero che le applicazioni $\phi, \psi : V \times V \to K$, definite, per ogni $v, w \in V$, da
$$\phi(v,w) = L(v) + M(w), \quad \psi(v,w) = L(v)M(w) \tag{1}$$
sono bilineari.

3. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, rappresentata rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k+2 & 2 & 4 \\ k-1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbf{R}. \tag{2}$$
a) Si determinino dimensioni e basi di nucleo ed immagine di $L$ al variare del parametro $k$.
b) Si dica per quali valori di $k$ il vettore $v = e_1 + e_2 + e_3$ appartiene all'immagine e/o al nucleo di $L$.
c) Si dica per quali valori di $k$ $L$ è diagonalizzabile.

4. Si considerino i polinomi $p_1(t) = t^2 + 2$, $p_2(t) = 3t + 4$ e $p_3(t) = -t^2 + 6t + 6$ e sia $W$ il sottospazio di $\mathbf{R}_2[t]$ generato da $p_1$, $p_2$ e $p_3$.
a) Si determini la dimensione e una base di $W$.
b) Si stabilisca per quali valori di $k$ il polinomio $f_k(t) = (k+1)t^2 + 3kt + 8$ appartiene a $W$.

5. Sia data l'applicazione $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, definita, per ogni $X \in \mathbf{R}^n$, da
$$F(X) = F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

a) Dimostrare che $F$ è lineare.
b) Scrivere la matrice associata ad $F$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^n$.
c) Scrivere una base per nucleo ed immagine di $F$.
d) Dire se $F$ è invertibile.
e) Dire se $F$ è diagonalizzabile.

SOLUZIONI PROVA SCRITTA DEL 30/1/2009

1. a) Riduciamo a scala le matrici che hanno rispettivamente come colonne i vettori $u_1, u_2, u_3$ e $w_3, w_2, w_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Concludiamo quindi che $\dim(U) = 3$, $\dim(W) = 2$. Inoltre possiamo scegliere $\mathcal{B}_U = \{u_1, u_2, u_3\}$ come base di $U$ e $\mathcal{B}_W = \{w_2, w_3\}$ come base di $W$.
b) Siccome $U = \mathbf{R}^3$, abbiamo che $U \cap W = \mathbf{R}^3 \cap W = W$ e $\mathcal{B}_{U\cap W} = \mathcal{B}_W$.

2. L'applicazione $\phi$ non è bilineare in quanto

$$\phi(v_1 + v_2, w) = L(v_1 + v_2) + M(w) = L(v_1) + L(v_2) + M(w), \tag{6}$$

che è diverso da

$$\phi(v_1, w) + \phi(v_2, w) = L(v_1) + L(v_2) + 2M(w). \tag{7}$$

Invece $\psi$ è bilineare in quanto

$$\begin{aligned} \psi(v_1 + v_2, w) &= L(v_1 + v_2)M(w) = [L(v_1) + L(v_2)]M(w) \\ &= L(v_1)M(w) + L(v_2)M(w) = \psi(v_1, w) + \psi(v_2, w), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \psi(v, w_1 + w_2) &= L(v)M(w_1 + w_2) = L(v)[M(w_1) + M(w_2)] \\ &= L(v)M(w_1) + L(v)M(w_2) = \psi(v, w_1) + \psi(v, w_2), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\psi(cv, w) = L(cv)M(w) = cL(v)M(w) = c\psi(v, w), \tag{10}$$

$$\psi(v, cw) = L(v)M(cw) = cL(v)M(w) = c\psi(v, w). \tag{11}$$

3. a) La dimensione dell'immagine di $L$ è data dal rango della matrice associata $A$. Siccome $\det(A) = 0$, $\text{rg}(A) \leq 2$. La sottomatrice $\begin{pmatrix} k & 0 \\ k+2 & 2 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da zero quando $k \neq 0$. Quindi, per il teorema degli orlati, $\text{rg}(A) = 2$ quando $k \neq 0$. Per $k = 0$ la matrice $A$ ha le tre colonne una multipla dell'altra, per cui in questo caso $\text{rg}(A) = 1$. Concludiamo quindi che
i) per $k \neq 0$, $\dim(\text{Im}(L)) = 2$ e quindi $\dim(\text{Ker}(L)) = 3 - 2 = 1$;
ii) per $k = 0$, $\dim(\text{Im}(L)) = 1$ e quindi $\dim(\text{Ker}(L)) = 3 - 1 = 2$.
Una base dell'immagine è data da $\text{rg}(A)$ colonne di $A$ linearmente indipendenti, una base del nucleo è ottenute dalla soluzione del sistema $AX = 0$, con $X$ generico vettore colonna di $\mathbf{R}^3$. Otteniamo
i) per $k \neq 0$, $\mathcal{B}_I = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ k+2 \\ k-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}_k = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.
ii) per $k = 0$, $\mathcal{B}_I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}_k = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.
b) Per $k \neq 0$, possiamo scrivere il vettore $v$ come combinazione lineare dei vettori di base dell'immagine di $L$. Infatti il sistema

$$c_1 \begin{pmatrix} k \\ k+2 \\ k-1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

ammette soluzione ($c_1 = 1/k, c_2 = -1/k$). Quindi $v \in \text{Im}(L)$ per $k \neq 0$. Per $k = 0$, il vettore $v$ non può essere scritto come combinazione lineare (in questo caso, multiplo) dell'unico vettore di base di $\text{Im}(L)$, e quindi $v$ non appartiene ad $\text{Im}(L)$. Analogamente dimostriamo che $v$ non appartiene a $\text{Ker}(L)$ per ogni $k$.
c) Otteniamo il polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - k)$. Per $k \neq 0$, la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 0$ è uguale a 2, mentre la sua molteplicità geometrica, data dalla dimensione del nucleo di $L$, è uguale ad 1. Per $k = 0$, la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 0$ è uguale a 3, mentre la sua molteplicità geometrica, data dalla dimensione del nucleo di $L$, è uguale ad 2. Quindi $L$ non è diagonalizzabile per ogni valore $k$.

4. Conviene riferirsi alla base canonica di $\mathbf{R}_2[t]$, cioé a $\mathcal{B} = \{t^2, t, 1\}$. I vettori delle coordinate di $p_1$, $p_2$, $p_3$ e $f_k$ rispetto a tale base sono dati rispettivamente da

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad F_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 3k \\ 8 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Rispondiamo simultaneamente ad entrambe le domande riducendo a scala la matrice $A^\star = A|F_K$, dove $A$ ha come colonne $X_1, X_2, X_3$. Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & k+1 \\ 0 & 3 & 6 & | & 3k \\ 2 & 4 & 6 & | & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & k+1 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \\ 0 & 2 & 4 & | & -k+3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & k+1 \\ 0 & 1 & 2 & | & k \\ 0 & 0 & 0 & | & -3k+3 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Otteniamo quindi:
a) $\dim(W) = \mathrm{rg}(A) = 2$ e, ad esempio, $\mathcal{B}(W) = \{p_1, p_2\}$.
b) $f_k \in W$ se e solo se il sistema rappresentato dalla matrice dei coefficienti $A^\star$ ammette soluzione. Per il teorema di Rouché-Capelli questo avviene se e solo se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star)$, cioé per $k = 1$.

5. a)

$$F(aX+bY) = F\begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ \vdots \\ ax_n + by_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ax_1 + by_1 \\ \vdots \\ ax_{n-1} + by_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = aF(X) + bF(Y). \tag{15}$$

b) Data la base canonica $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, abbiamo $F(e_k) = e_{k+1}$ $(k = 1, ..., n-1)$, $F(e_n) = 0$, da cui ricaviamo la matrice associata

$$A_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

c)

$$\mathcal{B}_I = \{e_2, ..., e_n\}, \quad \mathcal{B}_K = \{e_n\}. \tag{17}$$

d) $F$ non è invertibile in quanto $\det(A_F) = 0$.
e) $F$ non è diagonalizzabile in quanto l'unico autovalore, $\lambda = 0$, ha molteplicità algebrica uguale ad $n$ e molteplicità geometrica, data dalla dimensione del nucleo di $F$, uguale ad 1.