CINEMATICA – RIEPILOGO CONCETTI FONDAMENTALI

La cinematica studia il moto dei corpi senza occuparsi delle cause che l'hanno provocato.

Il caso più semplice è quello di un **oggetto puntiforme** (o **punto materiale**), intendendo con questa dizione un oggetto le cui dimensioni possono essere trascurate nella descrizione del moto.

Se conosciamo la posizione di un oggetto puntiforme P ad ogni tempo t, vale a dire se conosciamo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (**legge oraria del moto**), abbiamo una conoscenza completa della cinematica del punto materiale P, vale a dire che conosciamo la **traiettoria** (che è una curva nello spazio) percorsa dal punto P e dove si trova il punto su tale traiettoria ad ogni tempo t.

Fondamentali sono i concetti di **velocità** ed **accelerazione**. La velocità di un corpo misura la rapidità con cui la sua posizione varia nel tempo. L'accelerazione è invece la rapidità con cui la velocità varia nel tempo. Sia la velocità che l'accelerazione sono **grandezze vettoriali**, specificate cioé da modulo (dipendente dall'unità di misura scelta), direzione e verso. Le grandezze vettoriali sono fondamentalmente differenti dalle **grandezze scalari** (quali massa, tempo, temperatura, etc.) per le quali basta specificare un numero e un'unità di misura.

La **velocità scalare media** in un certo intervallo di tempo è definita come il rapporto tra lo spazio percorso in tale intervallo di tempo e l'intervallo di tempo medesimo:

$$v_m(t_0, t_0 + \Delta t) = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{(t_0 + \Delta t) - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \Delta s \equiv s(t_0 + \Delta t) - s(t_0), \tag{1}$$

la **velocità scalare istantanea** $v(t_0)$ al tempo t_0 come la derivata rispetto al tempo (valutata al tempo t_0) dello spazio percorso lungo la traiettoria:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

La **velocità vettoriale media** nell'intervallo di tempo tra t_0 e $t_0 + \Delta t$ è definita da

$$\vec{v}_m(t_0, t_0 + \Delta t) = \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{(t_0 + \Delta t) - \Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \Delta \vec{r} \equiv \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0). \tag{3}$$

La **velocità vettoriale istantanea** al tempo t_0 è definita come limite della velocità vettoriale media quando Δt tende a zero:

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \tag{4}$$

Le velocità (vettoriale) istantanea è sempre **tangente** alla traiettoria.

In analogia con quanto fatto sopra per le velocità, definiamo le accelerazioni scalare e vettoriale media ed istantanea. L'**accelerazione scalare media** è definita come

$$a_m(t_0, t_0 + \Delta t) = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{(t_0 + \Delta t) - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \Delta v \equiv v(t_0 + \Delta t) - v(t_0), \tag{5}$$

l'**accelerazione scalare istantanea** è data da

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{6}$$

l'**accelerazione vettoriale media** da

$$\vec{a}_m(t_0, t_0+\Delta t) = \frac{\vec{v}(t_0+\Delta t) - \vec{v}(t_0)}{(t_0+\Delta t) - t_0} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \Delta \vec{v} \equiv \vec{v}(t_0+\Delta t) - \vec{v}(t_0), \tag{7}$$

l'**accelerazione vettoriale istantanea** da

$$\vec{a}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \tag{8}$$

A differenza della velocità, l'accelerazione può avere sia una una componente tangenziale che una componente normale alla traiettoria. La componente tangenziale (**accelerazione tangenziale**) è data da $a_T = \lim_{\Delta t \to 0}(\Delta v/\Delta t)$ e misura quanto in fretta varia nel tempo la velocità scalare (istantanea), la componente normale (**accelerazione centripeta**) è responsabile della deviazione della traiettoria da quella rettilinea (tale componente si annulla quindi per un moto rettilineo).

I moti più semplici sono i **moti rettilinei**, per i quali la direzione del moto non varia nel tempo. In questo caso basta considerare velocità ed accelerazioni scalari, essendo la direzione e il verso del moto fissati dalla retta lungo cui avviene il moto e dall'orientazione scelta su quella retta.

Nel **moto rettilineo uniforme** la velocità $v(t) = v_0$ è costante nel tempo e quindi

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0), \quad s_0 = s(t_0), \tag{9}$$

e l'accelerazione

$$a(t) = 0. \tag{10}$$

Nel **moto uniformemente accelerato** l'accelerazione $a(t) = a_0$ è costante nel tempo e quindi

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0), \quad v_0 = v(t_0), \tag{11}$$

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\, a_0(t - t_0)^2. \tag{12}$$

I **moti centrali** sono quelli che avvengono in un piano (**moti piani**) e per i quali l'accelerazione è puramente radiale, vale a dire diretta verso il centro di un appropriato sistema di riferimento.

I **moti circolari** sono moti piani caratterizzati dall'avere (scegliendo opportunamente il centro del sistema di riferimento) la coordinata radiale r costante nel tempo, $r(t) = R$.

Il **moto circolare uniforme** è un tipo particolare di moto circolare, caratterizzato dall'avere il modulo della velocità (vale a dire la velocità scalare istantanea v) costante nel tempo, $v(t) = v$. In un moto circolare uniforme il moto è **periodico**, si ripete cioé identicamente dopo un intervallo di tempo (**periodo**)

$$T = \frac{2\pi R}{v}. \tag{13}$$

Il periodo T rappresenta il tempo impiegato a percorrere una volta la circonferenza. La **frequenza** è l'inverso del periodo e rappresenta, per il moto circolare uniforme, il numero di giri fatti nell'unità di tempo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R}. \tag{14}$$

La **velocità angolare** rappresenta la velocità con cui varia la coordinata angolare θ ed è data da

$$\omega = \frac{v}{R}. \tag{15}$$

Sempre nel caso di moto circolare uniforme, l'accelerazione è centripeta, vale a dire diretta verso il centro della circonferenza e di modulo

$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}. \tag{16}$$

Le caratteristiche del moto di un corpo possono essere studiate solo dopo aver fissato un **sistema di riferimento**. Possiamo passare dalla descrizione del moto di un oggetto secondo un sistema di riferimento a quella secondo un altro sistema di riferimento se conosciamo il moto relativo dei due sistemi di riferimento. Considerando per semplicità moti piani e due sistemi di riferimento $\Sigma : Oxy$ e $\Sigma' = \Omega XY$ abbiamo

$$\vec{r} = \vec{r}_\Omega + \vec{R}, \tag{17}$$

con $\vec{r}, \vec{R}$ coordinate di un punto materiale P in Σ, Σ' e $\vec{r}_\Omega$ posizione di Ω in Σ. Per le velocità,

$$\vec{v} = \vec{v}_\Omega + \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{R}, \tag{18}$$

con $\vec{v}, \vec{V}$ velocità del punto P in Σ, Σ', $\vec{v}_\Omega$ velocità di Ω in Σ e $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ **vettore velocità angolare**. Si noti come il termine $\vec{v}_\Omega$ sia dovuto alla **traslazione** del sistema di riferimento Σ' rispetto a Σ, il termine $\vec{\omega} \times \vec{R}$ alla **rotazione** attorno all'origine degli assi di Σ' rispetto agli assi di Σ. Per l'accelerazione,

$$\vec{a} = \vec{a}_\Omega + \vec{A} + \vec{a}_{\mathrm{tr}} + \vec{a}_{\mathrm{c}}, \tag{19}$$

con $\vec{a}, \vec{A}$ accelerazione del punto P in Σ, Σ', $\vec{a}_\Omega$ accelerazione di Ω in Σ (termine dovuto alla traslazione del sistema di riferimento Σ' rispetto a Σ). Gli ultimi due termini sono dovuti alla rotazione attorno all'origine degli assi di Σ' rispetto agli assi di Σ: $\vec{a}_{\mathrm{tr}} = -\omega^2 R\hat{R}$ **accelerazione di trascinamento** (che agisce sull'oggetto se questo ruota in modo solidale con Σ') e $\vec{a}_{\mathrm{c}} = 2\omega \times \vec{V}$ **accelerazione di Coriolis** (che appare quando un corpo si muove rispetto al sistema di riferimento Σ' il quale possiede un moto di tipo rotatorio rispetto a Σ).