CORSO ALGEBRA LINEARE 2005/06

Modalità d'esame

Gli appelli d'esame saranno tenuti durante i periodi di sospensione della didattica (fine gennaio – fine febbraio, metà giugno – fine luglio, settembre).

L'esame consisterà di una prova scritta ed una prova orale, entrambe obbligatorie.

La prova scritta consisterà nella soluzione di esercizi sugli argomenti svolti a lezione oltre ad una domanda di carattere teorico. Non è ammesso l'uso di libri di testo, eserciziari od appunti. L'esito della prova scritta non è vincolante per l'accesso alla prova orale e non ne pregiudica l'esito. È comunque indicativo del grado di preparazione raggiunto.

Per la prova orale è richiesto allo studente di dimostrare la comprensione e la padronanza degli argomenti trattati durante il corso. Viene inoltra richiesta la preparazione di cinque dimostrazioni di teoremi a scelta tra quelli trattati a lezione. Tali teoremi devono riguardare argomenti differenti del corso.

La prova scritta, se sufficiente, rimane valida per tutti gli appelli dell'anno di corso.

Testo di riferimento

Serge Lang, *Algebra lineare*, Boringhieri.

Lezione 1 - 12 ottobre 2005

Terminologia: insieme, sottoinsieme, intersezione ed unione di insiemi.

Vettori in $\mathbf{R}^n$. Punto in un n-spazio. Addizione di punti (vettori) e moltiplicazione per una costante. Proprietà associativa, commutativa e distributiva dell'addizione di vettori. Il vettore nullo in $\mathbf{R}^n$. Interpretazione geometrica dell'addizione di vettori (regola del parallelogramma). Vettori applicati. Vettori equivalenti.

Prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$: definizione e dimostrazione delle sue proprietà.

Esercizio svolto: $(A+B)^2 = A^2+2A\cdot B+B^2$, $(A-B)^2 = A^2-2A\cdot B+B^2$.

Dimostrazione disuguaglianza di Schwarz.

Norma di un vettore.

Lezione 2 - 13 ottobre 2005

Dimostrazione disuguaglianza triangolare.

Vettori unità.

Distanza fra due vettori: definizione e interpretazione geometrica.

Perpendicolarità: definizione e interpretazione geometrica.

Proiezione di un vettore su di un altro: definizione e interpretazione geometrica.

Angolo fra due vettori: definizione e interpretazione geometrica.

Esercizio svolto: dimostrare che, se due vettori non nulli A e B hanno stessa direzione e verso, allora il coseno dell'angolo θ fra essi compreso vale $+1$. Dimostrare che, se invece i due vettori hanno stessa direzione ma verso opposto, allora $\cos\theta = -1$.

Esercizio svolto: siano $A_1, ..., A_r$ vettori non nulli e mutuamente perpendicolari in $\mathbf{R}^n$. Siano $c_1, ..., c_r \in \mathbf{R}$ tali che $c_1A_1 + \cdots + c_rA_r = 0$. Dimostrare che $c_1 = \cdots = c_r = 0$.

Esercizio svolto: si chiami $d(A, B)$ la distanza fra due vettori dell n-spazio. Dimostrare che $d(A, B) = d(B, A)$ e che $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$.

Equazione parametrica retta per un punto ed avente la direzione di un vettore. Esempi in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$. Iperpiano in $\mathbf{R}^n$: definizione ed esempi. Vettori paralleli, rette parallele e piani paralleli. Piani perpendicolari ed angolo fra due piani.

Esercizio svolto: trovare il coseno dell'angolo tra i due piani $2x-y+z = 0$ e $x + 2y - z = 1$.

Esercizio svolto: dimostrare che le rette $3x - 5y = 1$ e $2x + 3y = 5$ non sono perpendicolari.

Esercizio: Sia $X \cdot N = P \cdot N$ l'equazione di un iperpiano e sia Q un punto non appartenente all'iperpiano. Dimostrare che esiste un solo $t \in \mathbf{R}$ tale che $Q + tN$ appartiene all'iperpiano. Trovare t in funzione di P, Q, N.

Numeri complessi. Somma e moltiplicazione di numeri complessi.

Lezione 3 - 19 ottobre 2005

Corrispondenza fra numeri complessi e vettori nel piano.

Coniugato di un numero complesso.

Inverso di un numero complesso.

Valore assoluto di un numero complesso.

Disuguaglianza triangolare per i numeri complessi.

Esercizio svolto: scrivere nella forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbf{R}$, i numeri complessi $\frac{1+i}{i}$ e $\frac{2+i}{2-i}$.

Esercizio svolto: provare che $\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ e che $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$.

Esercizo svolto: provare che $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$.

Vettori in $\mathbf{C}^n$. Definizione e proprietà del prodotto hermitiano di vettori in $\mathbf{C}^n$.

Definizione di corpo. Esempi: corpo dei numeri complessi, dei numeri reali e dei numeri razionali. I numeri interi non costituiscono un corpo.

Esercizio: dimostrare che $K = \{x \in \mathbf{C}, x = a + ib, a, b \in \mathbf{Q}\}$ è un corpo.

Definizione di spazio vettoriale V su un corpo K.

Esercizio svolto: il vettore nullo è univocamente determinato.

Esercizio svolto: dimostrare che $V = K^n$ su K è uno spazio vettoriale.

Esercizio svolto: dimostrare che $V = \mathbf{R}^n$ non è uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbf{C}$.

Lezione 4 - 20 ottobre 2005

Esercizio: dimostrare che $V = \mathbf{C}^n$ è uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbf{R}$.

Definizione di sottospazio vettoriale.

Esercizio svolto: se W_1 e W_2 sono sottospazi di V, anche l'intersezione di W_1 e W_2 è un sottospazio di V.

Esercizio svolto: dimostrare che, se $V = \mathbf{R}^n$ spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e $W = \{X \in \mathbf{R}^n \text{ t.c. } X = (x_1, ..., x_{n-1}, 0)\}$, allora W è un sottospazio di V.

Definizione di combinazione lineare di vettori.

Esercizio svolto: se $v_1, ..., v_n \in V$, l'insieme delle combinazioni lineari di tali vettori costituisce un sottospazio di V.

Definizione di spazio vettoriale delle funzioni $f : S \to K$, con S insieme e K corpo. Definizione di $f + g$ e cf, con $f, g \in V$ e $c \in K$.

Esercizio: dimostrare che $V = \{f : S \to K\}$ è uno spazio vettoriale.

Esercizio svolto: dimostrare che, se $V = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ e $W = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f \text{ continua}\}$, allora W è un sottospazio di V.

Definizione di indipendenza e dipendenza lineare di vettori.

Esercizio svolto: in $V = \mathbf{R}^n$ su $\mathbf{R}$ i vettori $e_1 = (0, 1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$,..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che se due dei vettori $v_1, ..., v_n$ sono uguali allora i vettori $v_1, ..., v_n$ sono linearmente dipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che due vettori v_1 e v_2 sono indipendenti se e solo se uno di loro è multiplo dell'altro, cioé $v_1 = kv_2$, con $k \in K$. Interpretazione geometrica in $\mathbf{R}^2$.

Esercizio svolto: dimostrare che un insieme di vettori $\{v_1, ..., v_n\}$ che comprende un sottoinsieme di vettori $\{v_1, ..., v_k\}$ (con $1 \leq k \leq n$) linearmente dipendenti è esso stesso dipendente. Dimostrare quindi che qualsiasi sottoinsieme di un sistema indipendente di vettori è indipendente.

Esercizio svolto: se uno dei vettori $v_1, ..., v_n$ è il vettore nullo, allora tali vettori sono linearmente dipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che, se $v_1, ..., v_n$ linearmente indipendenti e $\sum_i x_i v_i = \sum_i y_i v_i$, allora $x_i = y_i$ per tutti gli $i \in [1, n]$.

Esercizio svolto: dimostrare che nello spazio $V = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ le funzioni $f_1(t) = e^t$ e $f_2(t) = e^{2t}$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che nello spazio $V = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ le funzioni $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ e $f_3(t) = 2 + 2t$ sono linearmente dipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che in $\mathbf{R}^2$ is vettori $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-3, 2)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio: dimostrare che in $\mathbf{R}^2$ is vettori $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (-3, 2)$ e $v_3 = (1, -1)$ sono linearmente dipendenti.

Esercizio: dimostrare che in $\mathbf{R}^3$ is vettori $v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$ sono linearmente indipendenti.

Lezione 5 - 26 ottobre 2005

Definizione di base di V.

Definizione di coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base $\{v_1, ..., v_n\}$.

Esercizio svolto: dimostrare che i vettori $e_1 = (0, 1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$ costituiscono una base per $V = \mathbf{R}^n$ su $\mathbf{R}$.

Esercizio svolto: dimostrare che $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-1, 2)$ costituiscono una base per $V = \mathbf{R}^2$ su $\mathbf{R}$ e trovare le coordinate di $v = (1, 0)$ rispetto a tale base. Trovare poi le coordinate di v rispetto alla base $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$.

Definizione di sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti.

Teorema (dimostrato): se $\{v_1, ..., v_n\}$ generano V e $\{v_1, ..., v_r\}$ sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti, allora $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_r\}$ è una base per V.

Teorema (dimostrato): due basi di uno spazio vettoriale hanno il medesimo numero di elementi.

Esempio di spazio vettoriale: i polinomi $P(t)$ di grado $\leq n$, con $t \in \mathbf{R}$.

Esercizio svolto: dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_0 = 1, v_1 = t, ..., v_n = t^n\}$ è una base per lo spazio vettoriale dei polinomi $P(t)$ di grado $\leq n$. Quindi tale spazio vettoriale ha dimensione $n + 1$.

Esercizio: $\mathcal{B} = \{v_0 = 1, v_1 = t + 1, v_2 = t^2 + t + 1\}$ è una base per spazio vettoriale dei polinomi $P(t)$ di grado ≤ 2. Trovare quindi le coordinate del vettore $v = t^2$ rispetto a tale base.

Esercizio svolto: dimostrare che lo spazio vettoriale di tutti i polinomi $P(t)$ (di grado qualsiasi) non ha dimensione finita.

Definizione di insieme massimale di elementi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V.

Teorema (dimostrato): un insieme massimale di elementi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V è una base di V.

Esercizio: dimostrare che se W sottospazio di V e $\dim(W) = \dim(V)$, allora $W = V$.

Lezione 6 - 27 ottobre 2005

Teorema del completamento della base (dimostrato)

Esercizio svolto: Sia V uno spazio vettoriale sul corpo K e sia $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base di V. Dimostrare che $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \leftrightarrow X = (c_1, ..., c_n) \in K^n$ determina un isomorfismo tra gli spazi vettoriali V e K^n.

Definizione di somma di due sottospazi.

Esercizio svolto: la somma $U + W$ di due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V è un sottospazio di V.

Definizione di somma diretta di due sottospazi.

Teorema (dimostrato): se U, W sottospazi di V, $V = U + W$ e l'intersezione di U e W comprende il solo vettore nullo, allora $V = U \oplus W$.

Teorema (dimostrato): se W sottospazio di V, allora esiste U sottospazio di V tale che $V = U \oplus W$. Tale sottospazio U non è univocamente determinato. Esempio: $V = \mathbf{R}^2$, W sottospazio generato da $v_1 = (2, 1)$. Definendo U come il sottospazio generato da $v_2 = (0, 1)$, abbiamo $V = W \oplus U$. D'altra parte, definendo U' come il sottospazio generato da $v_2' = (1, 1)$ abbiamo anche $V = W \oplus U'$. Interpretazione geometrica del risultato.

Esercizio svolto: se $V = U \oplus W$, allora $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$.

Esercizio svolto: dati U e W sottospazi di V, provare che $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$. Esempio geometrico: $V = \mathbf{R}^3$ ($\dim(V) = 3$), $U = \{(a, b, 0),\ a, b \in \mathbf{R}\}$ (piano xy), $W = \{(0, c, d),\ c, d \in \mathbf{R}\}$ (piano yz).

Verificato che $\dim(U) = \dim(W) = 2$, $U + W = V$, $U \cap W = \{(0, k, 0),\ k \in \mathbf{R}\}$ (asse y, $\dim(U \cap W) = 1$).

Definizione di prodotto diretto $U \times W$ di due spazi vettoriali U e W su un corpo K.

Esercizio svolto: $U \times W$ è uno spazio vettoriale su K.

Esercizio svolto: provare che $\dim(U \times W) = \dim(U) + \dim(W)$.

Lezione 7 - 2 novembre 2005

Definizione di matrice $m \times n$ sul corpo K. Vettori riga e vettori colonna. Esempi numerici.

Addizione di matrici, moltiplicazione di una matrice per uno scalare.

Matrice zero.

Dimostrato che le matrici $m \times n$ con elementi di matrice in K costituiscono uno spazio vettoriale su K, chiamato $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Esercizio svolto: $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ ha dimensione mn e le matrici $\{e_{ij}\}$ (la matrice e_{ij} è definita come la matrice che ha l'elemento ij uguale ad 1 e tutti gli altri elementi nulli), con $i \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, sono una base per $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Esempio: le matrici

$$\left\{ e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

costituiscono una base per $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$.

Definizioni ed esempi: matrice quadrata, matrice trasposta, matrice diagonale, matrice identità, matrice simmetrica, matrice antisimmetrica, matrice triangolare superiore ed inferiore.

Esercizio svolto: trovare una base per le matrici $n \times n$ triangolari superiori

Esercizio svolto: dimostrare che, per ogni $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$, ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.

Esercizio svolto: dimostrare che, per ogni $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ e per ogni $c \in K$, ${}^t(cA) = c\ {}^tA$.

Esercizio svolto: dimostrare che, per ogni $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$, $A + {}^tA$ è simmetrica.

Esercizio: dimostrare che le matrici $n \times n$ simmetriche costituiscono un sottospazio di $\mathcal{M}_{n,n}$.

Esercizio: dimostrare che le matrici $n \times n$ antisimmetriche costituiscono un sottospazio di $\mathcal{M}_{n,n}$.

Esercizio: trovare una base per lo spazio delle matrici $n \times n$ simmetriche.

Esercizio: trovare una base per lo spazio delle matrici $n \times n$ antisimmetriche.

Esercizio svolto: sia $V = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, U il sottospazio delle matrici reali $n \times n$ simmetriche e W il sottospazio delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche. Provare che $V = U \oplus W$.

Esercizio svolto: sia $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, $U = \{A \in V, a_{21} = a_{22} = 0\}$, $W = \{A \in V, a_{12} = a_{22} = 0\}$. Trovare una base per i sottospazio $U + W$ e $U \cap W$. Verificare che $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Lezione 8 - 8 novembre 2005

Definizioni: sistema di equazioni lineari, sistema omogeneo e non omogeneo, soluzioni banali e non banali.

Teorema (dimostrato): sia dato un sistema omogeneo di m equazioni lineari in n incognite, con $n > m$, e i cui coefficienti siano elementi di un corpo K. Allora il sistema possiede soluzioni non banali in K.

Teorema (dimostrato): sia dato un sistema di n equazioni lineari in n incognite e siano i vettori $A^1, ..., A^n$ linearmente indipendenti. Allora il sistema possiede un'unica soluzione in K.

Esercizio (svolto): sia dato un sistema omogeneo di n equazioni lineari in n incognite e siano le colonne $A^1, ..., A^n$ linearmente indipendenti. Allora il sistema ammette solo la soluzione banale.

Esercizio (svolto): l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo di equazioni lineari sul corpo K è uno spazio vettoriale su K.

Esercizo: siano $A^1, .., A^n$ vettori colonna di dimensione n a coefficienti reali. Dimostrare che, se questi vettori sono linearmente indipendenti su $\mathbf{R}$, lo sono anche su $\mathbf{C}$.

Esercizio: sia dato un sistema di equazioni lineari omogenee con coefficienti reali. Dimostrare che, se questo sistema ammette una soluzione non banale in $\mathbf{C}$, ne ammette una non banale anche in $\mathbf{R}$.

Definizione di prodotto scalare in K^n.

Esercizio svolto: il prodotto scalare in K^n non è definito positivo (esempio: $K = \mathbf{C}$).

Esercizio svolto: il prodotto scalare in K^n è non degenere.

Esercizio: dimostrare che se un prodotto scalare è definito positivo allora è anche non degenere.

Definizione di prodotto di matrici. Esempi.

Lezione 9 - 9 novembre 2005

Proprietà del prodotto di matrici : $A(B+C) = AB + AC$, $A(BC) = (AB)C$. Dimostrazioni ed esempi.

Definizione di matrice inversa. Dimostrato che la matrice inversa, se esiste, è univocamente determinata.

Esercizio svolto: dimostrare che ${}^t(AB) = {}^tB^tA$. Esempio numerico.

Esempio numerico di matrici A, B tali che A e B non commutano, cioé $AB \neq BA$.

Esercizio svolto: dimostrare che ${}^t(ABC) = {}^tC^tB^tA$. Generalizzazione: ${}^t(A_1 \cdots A_k) = {}^tA_k \cdots {}^tA_1$.

Esercizio svolto: data una matrice $n \times n$ M, tale che ${}^tM = M$, dimostrare che $\langle A, B\rangle \equiv {}^tAMB$, con A, B vettori colonna in K^n, definisce un prodotto scalare. Mostrare che tale prodotto scalare in generale non è definito positivo.

Esercizio svolto: Sia A una matrice $n \times n$ invertibile. Dimostrare che ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

Traccia di una matrice $n \times n$: definizione ed esempi.

Esercizio svolto: dimostrare che, se A e B sono matrici $n \times n$, allora $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Lezione 10 - 10 novembre 2005

Definizioni: applicazione, funzione, immagine di un'applicazione.

Esempio di applicazione: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, con $f(x) = x^2$.

Esempio di applicazione: $f : \mathbf{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbf{R}$, con $f(x) = \sqrt{x}$.

Esempio di applicazione: $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, con $L(X) = A \cdot X$ per ogni $X \in \mathbf{R}^3$, con $A \in \mathbf{R}^3$ assegnato.

Esercizio svolto: data l'applicazione $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, con $F(x, y) = (2x, 2y)$, trovare l'immagine attraverso F della circonferenza di raggio 1.

Esercizio: trovare l'immagine attraverso F della retta $x = 2$, dove $F(x, y) \equiv (xy, y)$.

Esempio di applicazione: $F : S \to K^n$, con $F(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$. Esempio di rappresentazione parametrica di una retta nel 2-spazio: $F(t) = (t, 2t + 5)$. Definizione di applicazione somma e di prodotto di uno scalare per un'applicazione.

Definizione di applicazione composta $G \circ F$.

Esempio di applicazione composta: $G \circ F$, con $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $F(t) = (t, t^2)$ e $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $G(x, y) = xy$. In questo caso è definita anche $F \circ G$.

Definizione di applicazione lineare.

Esempio di applicazione lineare: siano dati V spazio vettoriale su K, una base $\{v_1, ..., v_n\}$ di V e l'applicazione $F : V \to K^n$ definita, per ogni $v \in V$, $v = x_1v_1 + \cdots x_nv_n$, da $F(v) = (x_1, ..., x_n)$. Provato che F è lineare.

Esercizio svolto: $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definito da $F(x, y, z) = (x, y)$ è lineare. Si tratta della proiezione sul piano (x, y). In generale le proiezioni sono applicazioni lineari.

Esercizio svolto: dati $A \in \mathbf{R}^3$ e l'applicazione $L_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da $L_A(X) = X \cdot A$ per ogni $X \in \mathbf{R}^3$, provare che L_A è lineare.

Esercizio svolto: siano date la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ e l'applicazione $L_A : K^n \to K^m$ definita da $L_A(X) = AX$ per ogni $X \in K_n$ vettore colonna. Dimostrare che L_A è lineare.

Esercizio svolto: data $F \to \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(X) = X + A$, con $A = (0, -1, 0)$, dimostrare che F non è lineare. In generale le traslazioni non sono applicazioni lineari.

Esercizio svolto: dimostrare che $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, con $F(x, y) = xy$ non è lineare.

Esercizio svolto: dimostrare che $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, con $F(x, y) = |x|$ non è lineare.

Esercizio svolto: dimostrare che $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, con $F(x, y) = (2x, y - x)$ è lineare.

Dimostrato che, data un'applicazione lineare F, $F(0) = 0$.

Lezione 11 - 16 novembre 2005

Dimostrato che, data un'applicazione lineare F, n vettori $v_1, ..., v_n$ e n scalari $x_1, ..., x_n$, $F(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1F(v_1) + \cdots + x_nF(v_n)$.

Teorema (dimostrato): un'applicazione lineare è univocamente determinata dai suoi valori sugli elementi di una base.

Definizione di nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.

Esercizio svolto: l'immagine di un insieme convesso attraverso una applicazione lineare è ancora un insieme convesso.

Esercizio: sia $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ un'applicazione lineare e sia $c \in \mathbf{R}$. Dimostrare che l'insieme $S \in \mathbf{R}^n$, con $S = \{A \in \mathbf{R}^n, \ \ L(A) > c\}$, è convesso.

rema (dimostrato): un'applicazione lineare il cui nucleo comprenda solo il vettore nullo trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.

Dimostrato che, data $F : V \to W$ applicazione lineare, $\mathrm{Im}(F)$ è un sottospazio di W, mentre $\mathrm{Ker}(F)$ è un sottospazio di V.

Teorema (dimostrato): data $F : V \to W$ applicazione lineare, $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F))$. Corollario: se $\dim(V) = \dim(W)$ e $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$, allora $\mathrm{Im}(F) = W$.

Definizione di applicazione iniettiva, suriettiva e biiettiva. Un'applicazione lineare F è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$.

Esempio: $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, con $F(x) = (x, 0)$ è iniettiva ma non suriettiva.

Esempio: $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, con $F(x, y) = x$ è suriettiva ma non iniettiva.

Esercizio: dire se le applicazioni $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, con $F(x, y, z) = (x, 0)$ e $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, con $G(x, y, z) = (x, y, 0)$ sono lineari, iniettive o suriettive. Trovare una base per il nucleo e per l'immagine sia per F che per G.

Esercizio svolto: dire se l' applicazione $f(x) = x^2$ è lineare, iniettiva o suriettiva.

Lezione 12 - 22 novembre 2005

Esercizio svolto: dire se le applicazioni $f(x) = x^3$ e $g(x) = x + 1$ sono lineari, iniettive, suriettive.

Applicazioni invertibili. Unicità dell'applicazione inversa.

Teorema (dimostrato): un'applicazione lineare iniettiva e suriettiva è invertibile e l'inversa è essa stessa un'applicazione lineare.

Definizione di isomorfismo.

Esempio di isomorfismo: $F : U \times W \to V = U \oplus W$, con $F(u, w) = u + w$ per ogni $u \in U$ e $w \in W$.

Esempio di isomorfismo: data $\{v_1, ..., v_n\}$ base di V e un generico vettore $v \in V$, con $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, $F(v) = (x_1, ..., x_n) \in K^n$.

Teorema (non dimostrato): se $F : V \to V'$ è un isomorfismo di spazi vettoriali, allora $\dim(V) = \dim(V') = n$.

Esercizio svolto: sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare suriettiva e sia $\dim(V) = \dim(W)$. Provare che F è un isomorfismo.

Esercizio svolto: siano V, W spazi vettoriali su K, con $\dim(V) < \dim(W)$. Dimostrare che (a) non esiste nessuna applicazione lineare $F : V \to W$ suriettiva e (b) non esiste nessuna applicazione lineare $G : W \to V$ iniettiva.

Composizione di applicazioni lineari.

Definizione di operatore.

Esercizio: dimostrare che l'operatore $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definito da $T(x, y) = (y, 2x - y)$ è invertibile e trovare T^{-1}.

Definizione di applicazione lineare singolare (non iniettiva) e non singolare (iniettiva).

Esercizio svolto: dimostrare che $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(x, y, z) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta, z)$ (rotazione di angolo θ attorno all'asse z) è non singolare.

Lezione 13 - 23 novembre 2005

Applicazione lineare associata ad una matrice.

Teorema (dimostrato): se due matrici danno luogo alla stessa applicazione lineare, esse coincidono.

Esercizio: dimostrare che $L_{A+B} = L_A + L_B$ e che $L_{cA} = cL_A$.

Matrice associata ad un'applicazione lineare.

Esempio: trovare la matrice associata all'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, tale che $F(v_1) = 3w_1 - w_2 + 17w_3$ e $F(v_2) = w_1 + w_2 - w_3$, con $\{v_1, v_2\}$ base di $\mathbf{R}^2$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ base di $\mathbf{R}^3$.

Esercizio (svolto): trovare la matrice associata all'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, con $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$.

Esercizio (svolto): trovare la matrice associata ad una rotazione di angolo θ dei vettori in $\mathbf{R}^2$.

Esercizio (svolto): trovare la matrice associata all' applicazione identica in $\mathbf{R}^2$ quando i vettori di base vengono ruotati di un angolo θ.

Esercizio (svolto): provare che le rotazioni in $\mathbf{R}^2$ conservano le distanze.

Esercizio: dimostrare che $R_\theta R_{\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$ e che $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$, dove R_θ indica la rotazione antioraria di angolo θ dei vettori in $\mathbf{R}^2$.

Matrice associata ad una composizione di applicazioni lineari.

Lezione 14 - 24 novembre 2005

Relazione tra matrici associate alla stessa applicazione lineare relativamente a basi differenti.

Esercizio (svolto): sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $F(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$. Trovare la matrice associata a tale applicazione lineare rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)\}$ di $\mathbf{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \{w_1 = (1, 3), w_2 = (2, 5)\}$ di $\mathbf{R}^2$.

Determinanti di matrici 2×2. Definizione e proprietà.

Determinanti di matrici $n \times n$. Proprietà.

Esercizio: sia $c \in K$ e $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$; dimostrare che $\det(cA) = c^n \det(A)$.

Regola di Cramer. Dimostrazione.

Teorema (dimostrato): dati n vettori colonna $A^1, ..., A^n \in K^n$ linearmente indipendenti, allora $\det(A^1, ..., A^n) = 0$.

Teorema (dimostrato): dati n vettori colonna $A^1, ..., A^n \in K^n$ tali che $\det(A^1, ..., A^n) = 0$ e un vettore colonna $B \in K^n$, allora esistono e sono univocamente determinati n scalari $x_1, ..., x_n$ tali che $x_1 A^1 + \cdots x_n A^n = B$.

Lezione 15 - 30 novembre 2005

Sviluppo di Laplace per il calcolo del determinante di una matrice $n \times n$.

Esempi numerici.

Esercizio (svolto): dimostrare che $\det(R_\theta) = 1$, dove R_θ indica la rotazione antioraria di angolo θ dei vettori in $\mathbf{R}^2$.

Esercizio (svolto): calcolare il determinante di una generica matrice $n \times n$ triangolare.

Proprietà del determinante (non dimostrate): $\det(A) = \det({}^t A)$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (corollario: se esiste l'inversa A^{-1} di una matrice A, allora $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$).

Teorema (dimostrato): se $\det(A) \neq 0$, la matrice A è invertibile. Formula esplicita per il calcolo di A^{-1}.

Lezione 16 - 1 dicembre 2005

Esercizio (svolto): trovare l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio (svolto): trovare A^{-1} per una generica matrice 2×2 invertibile.

Esercizio: trovare A^{-1}, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

Determinante di un'applicazione lineare $F : V \to V$.

Esercizio: calcolare il determinante dell'applicazione lineare $F : R^3 \to R^3$, con $F(x, y, z) = (2x - 4y + z, x - 2y + 3z, 5x + y - z)$.

Definizione di prodotto scalare. Prodotti scalari definiti positivi.

Esempio: prodotto scalare ordinario in K^n.

Vettori ortogonali. Complemento ortogonale.

Esercizio (svolto): il complemento ortogonale di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio di V.

Esercizio (svolto): dimostrare che, se $w \perp S$, con S sottoinsieme di V, allora $w \perp U$, con U sottospazio generato da S.

Esercizio (svolto): le soluzioni di un sistema di m equazioni lineari omogenee in n incognite costituiscono un sottospazio vettoriale di K^n.

Basi ortogonali.

Prodotti scalari definiti positivi.

Coefficienti di Fourier, proiezioni.

Esercizio (svolto): trovare i coefficienti di Fourier di un vettore $v \in V$ rispetto ai vettori v_i $(i = 1, ..., n)$ di una base ortogonale in V.

Lezione 17 - 7 dicembre 2005

Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (dimostrato).

Norma di un vettore. Proprietà della norma.

Esercizio: trovare una base ortonormale per lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -2, 0, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -1, 2)$ (si consideri l'ordinario prodotto scalare in $\mathbf{R}^4$).

Esercizio (svolto): dati uno spazio vettoriale V su $\mathbf{R}$ $(\dim(V) = n)$ e una base ortonormale per V, calcolare il prodotto scalare $\langle v, w\rangle$, con v, w generici vettori in V. Quale è la relazione con il prodotto scalare ordinario in $\mathbf{R}^n$?

Prodotti hermitiani. Esempio: dati $X = (x_1, ..., x_n)$, $Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{C}^n$, $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$.

Esercizio (svolto): trovare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbf{C}^3$ generato dai vettori $v_1 = (1, i, 0)$ e $v_2 = (1, 1, 1)$.

Disuguaglianza di Schwarz sul corpo complesso.

Lezione 18 - 14 dicembre 2005

Teorema (dimostrato): dati uno spazio vettoriale V su $\mathbf{R}$ dotato di prodotto scalare definito positivo (o uno spazio vettoriale V su $\mathbf{C}$ dotato di prodotto hermitiano definito positivo) e un sottospazio W di V, provare che $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$ e che $V = W \oplus W^\perp$.

Esempio: $V = \mathbf{R}^3$, W generato da $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$. Risulta che $\dim(W^\perp) = 1$ e che una base per $W^\perp$ è costituita dal vettore $v_3 = (0, 0, 1)$. Interpretazione geometrica.

Esercizio (svolto): dato lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ sul corpo $\mathbf{R}$, dimostrare che $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB)$ è un prodotto scalare. È definito positivo? È non degenere?

Esercizio: Con riferimento all'esercizio precedente, trovare il complemento ortogonale del sottospazio delle matrici $n \times n$ diagonali.

Prodotti scalari non definiti positivi.

Esempio: $V = \mathbf{R}^2$, $\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 - y_1 y_2$, con $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ vettori in $\mathbf{R}^2$. Dimostrato che, dato questo prodotto scalare e il sottospazio $W = \{cw,\ w = (1,1),\ c \in \mathbf{R}\}$, è $V \neq W \oplus W^\dagger$.

Metodo di ortogonalizzazione per prodotti scalari non definiti positivi (teorema dimostrato).

Esercizio (svolto): sia $V = \mathbf{R}^3$ e W il sottospazio di V generato dai vettori $v_1 = (1,2,1)$ e $v_2 = (1,2,2)$. Trovare una base ortogonale per W rispetto al prodotto scalare $\langle u, v \rangle \equiv u_x v_x - u_y v_y - u_z v_z$, con $u = (u_x, u_y, u_z)$ e $v = (v_x, v_y, v_z)$ vettori in $\mathbf{R}^3$.

Definizioni di funzionale e spazio duale.

Lezione 19 - 15 dicembre 2005

Esempi di funzionali.

Teorema (non dimostrato): la dimensione dello spazio duale $V^\star$ di uno spazio vettoriale V è uguale alla dimensione di V.

Definizione di $\mathrm{Perp}_{V^\star}(W)$, con W sottospazio di V.

Teorema (non dimostrato): dato W sottospazio di V, con $\dim(V) = n$, $\dim(W) + \dim(\mathrm{Perp}_{V^\star}(W)) = n$.

Teorema (dimostrato): dato uno spazio vettoriale V e un prodotto scalare non degenere in V, è possibile stabilire un isomorfismo tra i vettori $v \in V$ e i funzionali $L_v \in V^\star$, con $L_v(w) \equiv \langle v, w \rangle$ per ogni w in V.

Teorema (dimostrato): dato W sottospazio di V, con $\dim(V) = n$, e dato un prodotto scalare non degenere in V, $\dim(W) + \dim(\mathrm{Perp}_V(W)) = n$. Esercizio (svolto): dati $V = \mathbf{C}^2$, il prodotto scalare $\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$, con $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ appartenenti a V e il sottospazio $W = \{\alpha v,\ v = (1, i),\ \alpha \in \mathbf{C}\}$, dimostrare che $W = \mathrm{Perp}_V(W)$, cosí che $\dim(W) + \dim(\mathrm{Perp}_V(W)) = 2 = \dim(V)$ ma $V \neq W \oplus \mathrm{Perp}_V(W)$.

Caratteristica (rango) per righe e per colonne di una matrice.

Dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee (teorema dimostrato).

Sistema di equazioni lineari non omogenee: dimensione dell'insieme delle soluzioni.

Esercizio (svolto): determinare la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Lezione 20 - 21 dicembre 2005

Teorema di Rouché-Capelli (dimostrato).

Esercizio (svolto): determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, la risolubilità e la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (5-\lambda)x - 2y - z = 1, \\ -2x + (2-\lambda)y - 2z = 2, \\ -x - 2y + (5-\lambda)z = 1. \end{cases}$$

Dove possibile, risolvere il sistema usando il metodo di Cramer.

Esercizio: si consideri il sistema lineare dato dalle equazioni

$$\begin{cases} (1-t)x + 2y - tz = t, \\ x - ty + 2z = 1, \end{cases}$$

con t parametro reale. Studiare la dimensione dello spazio delle soluzioni al variare di t.

Esercizio (svolto): descrivere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, nucleo ed immagine dell'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k & k & 4 \\ 3 & 3 & 3k \end{pmatrix}.$$

Risolvere il sistema lineare $Av = b$, con $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $(x, y, z \in \mathbf{R})$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lezione 21 - 16 dicembre 2005

Applicazioni bilineari. Forme bilineari.

Esempio: il prodotto scalare in K^n.

Esempio: $g(u, v) = \phi(u)\psi(v)$, con $u, v \in V$ e $\phi(u), \psi(v)$ funzionali.

Esempio: $g_C(X, Y) = {}^tXCY$, con $X, Y \in K^n$ e C matrice $n \times n$ su K. Dimostrato che g_c è la forma nulla se e soltanto se $C = 0$.

Forme bilineari simmetriche.

Teorema (dimostrato): una matrice $n \times n$ C in K rappresenta una forma bilineare simmetrica se e soltanto se C è una matrice simmetrica.

Costruzione della matrice C associata ad una forma bilineare e viceversa.

Forme bilineari diagonali.

Cambiamento della matrice C associata ad una forma bilineare sotto cambiamento di coordinate.

Esercizio: data la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

associata ad una forma bilineare rispetto ad una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, trovare la matrice C' associata alla stessa forma bilineare rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ ottenuta da $\mathcal{B}$ mediante una rotazione di angolo θ del piano (x, y).

Forma quadratica $f(v)$ determinata da una forma bilineare $g(u, v)$.

Dimostrate le identità $g(v, w) = \frac{1}{4}[f(v + w) - f(v - w)]$ e $g(v, w) = \frac{1}{2}[f(v + w) - f(v) - f(w)]$.

Esercizio (svolto): data la forma quadratica $f(X) = 2x^2 + 3xy + y^2$, con $X = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, trovare la matrice associata alla forma bilineare simmetrica che determina la forma quadratica f.

Lezione 22 - 11 gennaio 2006

Operatori simmetrici.

Forme quadratiche determinate da un operatore.

Esempio: $V = \mathbf{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$; trovare $f(X) = \langle AX, X \rangle$, con $X \in V$.

Operatore aggiunto.

Operatori hermitiani e matrici hermitiane. Esempi di matrici hermitiane

Esercizio: dimostrare che se una matrice A è hermitiana ed invertibile allora anche A^{-1} è hermitiana.

Esercizio: dimostrare che le operazioni di inversione, coniugazione e trasposizione di una matrice $n \times n$ A commutano (si assume che A sia invertibile).

Esercizio: dimostrare che se A è hermitiana e diversa dalla matrice nulla allora $\mathrm{Tr}(AA^\star) > 0$, dove $A^\star$ è la matrice aggiunta di A.

Operatori unitari reali (ortogonali).

Teorema (dimostrato): un'operatore è unitario se e solo se conserva la norma dei vettori.

Matrici ortogonali.

Esercizio (svolto): la matrice R_θ che descrive una rotazione di angolo θ in $\mathbf{R}^2$ è ortogonale.

Lezione 23 - 12 gennaio 2006

Operatori unitari (complessi).

Matrici unitarie (complesse).

Esercizio (svolto): dati V spazio vettoriale su $\mathbf{R}$, due basi ortonormali $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, ..., w_n\}$ e l'operatore $A : V \to V$ tale che $Av_i = w_i$ per $i = 1, ..., n$, dimostrare che A è un operatore unitario reale.

Esercizio (svolto): dato A operatore unitario e $\{v_1, ..., v_n\}$ base ortonormale di V, anche $\{Av_1, ..., Av_n\}$ è una base ortonormale di V.

Esercizio (svolto): dato $V = \mathbf{R}^2$ in cui è definito un prodotto scalare definito positivo in $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2\}$ basi ortonormali di V, $A : V \to V$ operatore unitario reale con $Av_i = w_i$, $w_1 = av_1 + bv_2$, $w_2 = cv_1 + dv_2$, dimostrare che $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$, $a^2 = d^2$, $b^2 = c^2$. Dimostrare inoltre che, se A è una rotazione (cioé $\det(A) = 1$), allora la matrice associata ad A rispetto alla base $\mathcal{B}$ è data da $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Esempio di matrice associata ad una forma bilineare non definita positiva: $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Indice di nullità.

Teorema (dimostrato): una forma bilineare è non degenere se e solo se l'indice di nullità è uguale a zero.

Teorema di Sylvester (dimostrato). Indice di positività.

Esercizio: trovare indice di positività e di nullità della forma bilineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Lezione 24 - 18 gennaio 2006

Polinomi. Polinomi come spazi vettoriali. Prodotto di due polinomi.

Teorema: se due polinomi $f(t)$ e $g(t)$ sono uguali per ogni t, allora sono uguali anche i coefficienti dei due polinomi.

Grado di un polinomio. Polinomi lineari. Grado del prodotto di due polinomi.

Radice di un polinomio.

Teorema: un polinomio con coefficienti complessi con grado maggiore di zero ha almeno una radice in campo complesso.

Teorema: un polinomio di grado n in campo complesso ha n radici in $\mathbf{C}$.

Molteplicità delle radici di un polinomio.

Polinomi di matrici. Esempi e proprietà.

Teorema (dimostrato): data A matrice $n \times n$ sul corpo K, esiste un polinomio non nullo f tale che $f(A) = 0$.

Autovalori ed autovettori di un operatore. Definizione.

Autovalori ed autovettori di una matrice $n \times n$. Definizione.

Esempio: trovare autovalori ed autovettori di una matrice diagonale.

Definizione di autospazio V_λ relativo all'autovalore λ.

Teorema (dimostrato): autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Teorema (dimostrato): λ è autovalore di un operatore A se e solo se $A-\lambda I$ non è invertibile.

Teorema (dimostrato): dato un operatore A in uno spazione vettoriale V su $\mathbf{C}$, con $\dim(V) \geq 1$, esiste un autovettore di A.

Lezione 25 - 19 gennaio 2006

Matrice associata ad un operatore rispetto ad una base di autovettori.

Operatori (e matrici) diagonalizzabili.

Esercizio (svolto): trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio (svolto): trovare autovalori ed autovettori della matrice di rotazione $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Esercizio: trovare autovalori ed autovettori della seguente matrice: $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Dimostrare che per $\cos\theta = 1$ questa matrice rappresenta una riflessione rispetto all'asse delle x.

Polinomio caratteristico: definizione ed esempi.

Teorema (dimostrato) λ è un autovalore di una matrice A se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico di A.

Molteplicità di un autovalore.

Esercizio (svolto): trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio (svolto): trovare gli autovalori di una matrice diagonale.

Esercizio (svolto): trovare gli autovalori di una matrice triangolare.

Teorema (dimostrato): date due matrici $n \times n$ A e B, con B invertibile, abbiamo $p_A(\lambda) = p_{B^{-1}AB}(\lambda)$.

Esercizio (svolto): dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a \neq 0$, è diagonalizzabile.

Esercizio: trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lezione 26 - 25 gennaio 2006

Ventaglio. Base a ventaglio. Matrice (triangolare superiore) associata ad un operatore relativamente ad una base a ventaglio.

Operatori triagolabili. Matrici triangolabili.

Teorema: dato un operatore A definito in uno spazio vettoriale complesso, esiste un ventaglio per A.

Teorema di Hamilton-Cayley (dimostrato).

Esercizio (svolto): utilizzando il teorema di Hamilton-Cayley si calcoli B^{34}, dove B è la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Proprietà degli autovalori di un'applicazione unitaria.

Teorema (dimostrato): dato V spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ dotato di prodotto hermitiano definito positico e A applicazione unitaria da V in V, esiste una base ortonormale di V costituita da autovettori di A. Corollario: data A matrice unitaria complessa, esiste U unitaria tale che $U^{-1}AU$ sia diagonale.

Proprietà degli autovalori e degli autovettori di operatori simmetrici reali.

Lezione 27 - 26 gennaio 2006

Teorema spettrale, caso reale (dimostrato). Corollario (dimostrato): data A matrice simmetrica reale $n \times n$, esiste una matrice unitaria reale $n \times n$ U tale che ${}^tUAU$ sia una matrice diagonale.

Esercizio (svolto): data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, trovare una base spettrale di $\mathbf{R}^2$.

Teorema spettrale, caso complesso.

Esercizio (svolto): trovare una trasformazione di similitudine che diagonalizzi la matrice $\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio (svolto): dire se è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio (svolto): si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita, nella base $\{e_1, e_2, e_3\}$, da

$$\begin{cases} L(e_1) = -e_1 + e_2, \\ L(e_2) = e_1 - e_2, \\ L(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases} \tag{1}$$

a) Determinare nucleo ed immagine di L.
b) Trovare autovalori ed autovettori della matrice associata ad L.