CORSO ALGEBRA LINEARE 2006/07

Modalità d'esame

Gli appelli d'esame saranno tenuti durante i periodi di sospensione della didattica (fine gennaio – fine febbraio, metà giugno – fine luglio, settembre).

L'esame consisterà di una prova scritta ed una prova orale, entrambe obbligatorie.

La prova scritta consisterà nella soluzione di esercizi sugli argomenti svolti a lezione oltre ad una domanda di carattere teorico. Non è ammesso l'uso di libri di testo, eserciziari od appunti. L'esito della prova scritta non è vincolante per l'accesso alla prova orale. È comunque indicativo del grado di preparazione raggiunto e concorre alla valutazione finale. Nel caso di prova scritta gravemente insufficiente, è consigliata la ripetizione della medesima prima di sostenere la prova orale.

Per la prova orale è richiesto allo studente di dimostrare la comprensione e la padronanza degli argomenti trattati durante il corso. Viene inoltra richiesta la preparazione di cinque dimostrazioni di teoremi a scelta tra quelli trattati a lezione. Tali teoremi devono riguardare argomenti differenti del corso.

La prova scritta, se sufficiente, rimane valida per tutti gli appelli dell'anno di corso.

Testo di riferimento

Serge Lang, *Algebra lineare*, Boringhieri.

Lezione 1 - 4 ottobre 2006

Terminologia: insieme, sottoinsieme, intersezione ed unione di insiemi.

Vettori in $\mathbf{R}^n$. Punto in un n-spazio. Addizione di punti (vettori) e moltiplicazione per una costante. Proprietà associativa, commutativa e distributiva dell'addizione di vettori. Il vettore nullo in $\mathbf{R}^n$. Interpretazione geometrica dell'addizione di vettori (regola del parallelogramma). Vettori applicati. Vettori equivalenti.

Prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$: definizione e dimostrazione delle sue proprietà.

Esercizio: $(A+B)^2 = A^2 + 2A\cdot B + B^2$, $(A-B)^2 = A^2 - 2A\cdot B + B^2$.

Lezione 2 - 5 ottobre 2006

Risoluzione dell'esercizio assegnato alla fine della lezione precedente.

Dimostrazione disuguaglianza di Schwarz.
Norma di un vettore.
Dimostrazione disuguaglianza triangolare.
Vettori unità.
Distanza fra due vettori: definizione e interpretazione geometrica.
Perpendicolarità: definizione e interpretazione geometrica.
Proiezione di un vettore su di un altro: definizione e interpretazione geometrica.
Angolo fra due vettori: definizione e interpretazione geometrica.
Esercizio svolto: dimostrare che, se due vettori non nulli A e B hanno stessa direzione e verso, allora il coseno dell'angolo θ fra essi compreso vale $+1$. Dimostrare che, se invece i due vettori hanno stessa direzione ma verso opposto, allora $\cos\theta = -1$.
Esercizio svolto: siano $A_1, ..., A_r$ vettori non nulli e mutuamente perpendicolari in $\mathbf{R}^n$. Siano $c_1, ..., c_r \in \mathbf{R}$ tali che $c_1A_1 + \cdots + c_rA_r = 0$. Dimostrare che $c_1 = \cdots = c_r = 0$.
Esercizio: si chiami $d(A, B)$ la distanza fra due vettori dell n-spazio. Dimostrare che $d(A, B) = d(B, A)$ e che $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$.

Lezione 3 - 11 ottobre 2006
Equazione parametrica retta per un punto ed avente la direzione di un vettore. Esempi in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$. Iperpiano in $\mathbf{R}^n$: definizione ed esempi. Vettori paralleli, rette parallele e piani paralleli. Piani perpendicolari ed angolo fra due piani.
Esercizio svolto: trovare il coseno dell'angolo tra i due piani $2x-y+z = 0$ e $x + 2y - z = 1$.
Esercizio svolto: dimostrare che le rette $3x - 5y = 1$ e $2x + 3y = 5$ non sono perpendicolari.
Numeri complessi. Somma e moltiplicazione di numeri complessi.
Corrispondenza fra numeri complessi e vettori nel piano.
Coniugato di un numero complesso.
Inverso di un numero complesso.
Valore assoluto di un numero complesso.
Disuguaglianza triangolare per i numeri complessi.
Esercizio svolto: scrivere nella forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbf{R}$, i numeri complessi $\frac{1+i}{i}$ e $\frac{2+i}{2-i}$.

Esercizio svolto: provare che $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ e che $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta}$.

Esercizo svolto: provare che $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$.

Esercizio: dimostrare che $\left|\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right|=1$.

Vettori in $\mathbf{C}^n$. Definizione e proprietà del prodotto hermitiano di vettori in $\mathbf{C}^n$.

Lezione 4 - 12 ottobre 2006

Definizione di corpo. Esempi: corpo dei numeri complessi, dei numeri reali e dei numeri razionali. I numeri interi non costituiscono un corpo.

Esercizio: dimostrare che $K=\{x\in\mathbf{C}, x=a+ib, a,b\in\mathbf{Q}\}$ è un corpo.

Definizione di spazio vettoriale V su un corpo K.

Esercizio svolto: il vettore nullo è univocamente determinato.

Esercizio svolto: dimostrare che $V=K^n$ su K è uno spazio vettoriale.

Esercizio svolto: dimostrare che $V=\mathbf{R}^n$ non è uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbf{C}$.

Esercizio: dimostrare che $V=\mathbf{C}^n$ è uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbf{R}$.

Definizione di sottospazio vettoriale.

Esercizio svolto: se W_1 e W_2 sono sottospazi di V, anche l'intersezione di W_1 e W_2 è un sottospazio di V.

Esercizio svolto: dimostrare che, se $V=\mathbf{R}^n$ spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e $W=\{X\in\mathbf{R}^n \text{ t.c. } X=(x_1,...,x_{n-1},0)\}$, allora W è un sottospazio di V.

Definizione di combinazione lineare di vettori.

Esercizio svolto: se $v_1,...,v_n\in V$, l'insieme delle combinazioni lineari di tali vettori costituisce un sottospazio di V.

Definizione di spazio vettoriale delle funzioni $f:S\to K$, con S insieme e K corpo. Definizione di $f+g$ e cf, con $f,g\in V$ e $c\in K$.

Esercizio: dimostrare che $V=\{f:S\to K\}$ è uno spazio vettoriale.

Esercizio: dimostrare che, se $V=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\}$ e $W=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f \text{ continua}\}$, allora W è un sottospazio di V.

Lezione 5 - 18 ottobre 2006

Definizione di indipendenza e dipendenza lineare di vettori.

Esercizio svolto: in $V=\mathbf{R}^n$ su $\mathbf{R}$ i vettori $e_1=(0,1,0,...,0)$, $e_2=(0,1,0,...,0)$,..., $e_n=(0,...,0,1)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che nello spazio $V=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\}$ le funzioni $f_1(t)=e^t$ e $f_2(t)=e^{2t}$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che nello spazio $V = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ le funzioni $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ e $f_3(t) = 2 + 2t$ sono linearmente dipendenti.

Esercizio: dimostrare che nello spazio $V = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ le funzioni $f_1(t) = \sin t$ e $f_2(t) = \sin(2t)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che se due dei vettori $v_1, ..., v_n$ sono uguali allora i vettori $v_1, ..., v_n$ sono linearmente dipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che due vettori v_1 e v_2 sono indipendenti se e solo se uno di loro è multiplo dell'altro, cioé $v_1 = kv_2$, con $k \in K$. Interpretazione geometrica in $\mathbf{R}^2$.

Esercizio svolto: dimostrare che un insieme di vettori $\{v_1, ..., v_n\}$ che comprende un sottoinsieme di vettori $\{v_1, ..., v_k\}$ (con $1 \leq k \leq n$) linearmente dipendenti è esso stesso dipendente. Dimostrare quindi che qualsiasi sottoinsieme di un sistema indipendente di vettori è indipendente.

Esercizio svolto: se uno dei vettori $v_1, ..., v_n$ è il vettore nullo, allora tali vettori sono linearmente dipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che, se $v_1, ..., v_n$ linearmente indipendenti e $\sum_i x_i v_i = \sum_i y_i v_i$, allora $x_i = y_i$ per tutti gli $i \in [1, n]$.

Definizione di base di V.

Definizione di coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base $\{v_1, ..., v_n\}$.

Esercizio svolto: dimostrare che i vettori $e_1 = (0, 1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$ costituiscono una base per $V = \mathbf{R}^n$ su $\mathbf{R}$.

Esercizio svolto: dimostrare che $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-1, 2)$ costituiscono una base per $V = \mathbf{R}^2$ su $\mathbf{R}$ e trovare le coordinate di $v = (1, 0)$ rispetto a tale base. Trovare poi le coordinate di v rispetto alla base $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$.

Esercizio: dimostrare che $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -1)$ costituiscono una base per $V = \mathbf{R}^3$ su $\mathbf{R}$ e trovare le coordinate di $v = (0, 0, 1)$ rispetto a tale base.

Definizione di sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti.

Teorema (dimostrato): se $\{v_1, ..., v_n\}$ generano V e $\{v_1, ..., v_r\}$ sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti, allora $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_r\}$ è una base per V.

Teorema (dimostrato): due basi di uno spazio vettoriale hanno il medesimo numero di elementi.

Lezione 6 - 19 ottobre 2006

Esempio di spazio vettoriale: i polinomi $P(t)$ di grado $\leq n$, con $t \in \mathbf{R}$.

Esercizio svolto: dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_0 = 1, v_1 = t, ..., v_n = t^n\}$ è una base per lo spazio vettoriale dei polinomi $P(t)$ di grado $\leq n$. Quindi tale spazio vettoriale ha dimensione $n+1$.

Esercizio: $\mathcal{B} = \{v_0 = 1, v_1 = t+1, v_2 = t^2+t+1\}$ è una base per spazio vettoriale dei polinomi $P(t)$ di grado ≤ 2. Trovare quindi le coordinate del vettore $v = 2t^2 - 5t + 6$ rispetto a tale base.

Esercizio svolto: dimostrare che lo spazio vettoriale di tutti i polinomi $P(t)$ (di grado qualsiasi) non ha dimensione finita.

Definizione di insieme massimale di elementi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V.

Teorema (dimostrato): un insieme massimale di elementi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V è una base di V.

Esercizio: dimostrare che se W sottospazio di V e $\dim(W) = \dim(V)$, allora $W = V$.

Teorema del completamento della base (dimostrato).

Definizione di somma di due sottospazi.

Esercizio svolto: la somma $U+W$ di due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V è un sottospazio di V.

Definizione di somma diretta di due sottospazi.

Teorema (dimostrato): se U, W sottospazi di V, $V = U+W$ e l'intersezione di U e W comprende il solo vettore nullo, allora $V = U \oplus W$.

Teorema (dimostrato): se W sottospazio di V, allora esiste U sottospazio di V tale che $V = U \oplus W$. Tale sottospazio U non è univocamente determinato. Esempio: $V = \mathbf{R}^2$, W sottospazio generato da $v_1 = (2,1)$. Definendo U come il sottospazio generato da $v_2 = (0,1)$, abbiamo $V = W \oplus U$. D'altra parte, definendo U' come il sottospazio generato da $v_2' = (1,1)$ abbiamo anche $V = W \oplus U'$. Interpretazione geometrica del risultato.

Lezione 7 - 25 ottobre 2006

Esercizio svolto: se $V = U \oplus W$, allora $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$.

Esercizio svolto: dati U e W sottospazi di V, provare che $\dim(U+W) = \dim(U)+\dim(W)-\dim(U \cap W)$. Esempio geometrico: $V = \mathbf{R}^3$ ($\dim(V) = 3$), $U = \{(a,b,0),\ a,b \in \mathbf{R}\}$ (piano xy), $W = \{(0,c,d),\ c,d \in \mathbf{R}\}$ (piano yz). Verificato che $\dim(U) = \dim(W) = 2$, $U+W = V$, $U \cap W = \{(0,k,0),\ k \in \mathbf{R}\}$ (asse y, $\dim(U \cap W) = 1$).

Definizione di prodotto diretto $U \times W$ di due spazi vettoriali U e W su un corpo K.

Esercizio: $U \times W$ è uno spazio vettoriale su K.

Esercizio: provare che $\dim(U \times W) = \dim(U) + \dim(W)$.

Definizione di matrice $m \times n$ sul corpo K. Vettori riga e vettori colonna. Esempi numerici.

Addizione di matrici, moltiplicazione di una matrice per uno scalare.

Matrice zero.

Dimostrato che le matrici $m \times n$ con elementi di matrice in K costituiscono uno spazio vettoriale su K, chiamato $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Esercizio: trovare la dimensione dello spazio vettoriale $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Lezione 8 - 26 ottobre 2006

Esercizio svolto: $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ ha dimensione mn e le matrici $\{e_{ij}\}$ (la matrice e_{ij} è definita come la matrice che ha l'elemento ij uguale ad 1 e tutti gli altri elementi nulli), con $i \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, sono una base per $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Esempio: le matrici

$$\left\{ e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

costituiscono una base per $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$.

Definizioni ed esempi: matrice quadrata, matrice trasposta, matrice diagonale, matrice identità, matrice simmetrica, matrice antisimmetrica, matrice triangolare superiore ed inferiore.

Esercizio svolto: trovare una base per le matrici $n \times n$ triangolari superiori

Esercizio: dimostrare che, per ogni $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$, ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

Esercizio: dimostrare che, per ogni $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ e per ogni $c \in K$, ${}^t(cA) = c\,{}^tA$.

Esercizio svolto: dimostrare che, per ogni $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$, $A + {}^tA$ è simmetrica.

Esercizio: dimostrare che le matrici $n \times n$ simmetriche costituiscono un sottospazio di $\mathcal{M}_{n,n}$.

Esercizio: dimostrare che le matrici $n \times n$ antisimmetriche costituiscono un sottospazio di $\mathcal{M}_{n,n}$.

Esercizio: trovare una base per lo spazio delle matrici $n \times n$ simmetriche.

Esercizio: trovare una base per lo spazio delle matrici $n \times n$ antisimmetriche.

Esercizio svolto: sia $V = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, U il sottospazio delle matrici reali $n \times n$ simmetriche e W il sottospazio delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche. Provare che $V = U \oplus W$.

Esercizio svolto: sia $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, $U = \{A \in V, a_{21} = a_{22} = 0\}$, $W = \{A \in V, a_{12} = a_{22} = 0\}$. Trovare una base per i sottospazio $U + W$ e $U \cap W$. Verificare che $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Definizioni: sistema di equazioni lineari, sistema omogeneo e non omogeneo, soluzioni banali e non banali.

Teorema (dimostrato): sia dato un sistema omogeneo di m equazioni lineari in n incognite, con $n > m$, e i cui coefficienti siano elementi di un corpo K. Allora il sistema possiede soluzioni non banali in K.

Teorema (dimostrato): sia dato un sistema di n equazioni lineari in n incognite e siano i vettori $A^1, ..., A^n$ linearmente indipendenti. Allora il sistema possiede un'unica soluzione in K.

Esercizio (svolto): sia dato un sistema omogeneo di n equazioni lineari in n incognite e siano le colonne $A^1, ..., A^n$ linearmente indipendenti. Allora il sistema ammette solo la soluzione banale.

Esercizio (svolto): l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo di equazioni lineari sul corpo K è uno spazio vettoriale su K.

Lezione 9 - 8 novembre 2006

Definizione di prodotto scalare in K^n.

Esercizio svolto: il prodotto scalare in K^n non è definito positivo (esempio: $K = \mathbf{C}$).

Esercizio svolto: il prodotto scalare in K^n è non degenere.

Esercizio: dimostrare che se un prodotto scalare è definito positivo allora è anche non degenere.

Definizione di prodotto di matrici. Esempi.

Proprietà del prodotto di matrici : $A(B + C) = AB + AC$, $A(BC) = (AB)C$. Dimostrazioni ed esempi.

Esempio numerico di matrici A, B tali che A e B non commutano, cioé $AB \neq BA$.

Definizione di matrice inversa. Dimostrato che la matrice inversa, se esiste, è univocamente determinata.

Esercizio svolto: dimostrare che ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

Esercizio svolto: dimostrare che ${}^t(ABC) = {}^tC{}^tB{}^tA$. Generalizzazione:

${}^t(A_1 \cdots A_k) = {}^tA_k \cdots {}^tA_1$

Lezione 10 - 9 novembre 2006

Esercizio svolto: Sia A una matrice $n \times n$ invertibile. Dimostrare che ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

Traccia di una matrice $n \times n$: definizione ed esempi.

Esercizio svolto: dimostrare che, se A e B sono matrici $n \times n$, allora $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Esercizio svolto: data la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, dimostrare che A ammette inversa se e solo se $ad - bc \neq 0$.

Esercizio svolto: si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 sul corpo reale. Dimostrare che, se $B \in V$ e $AB = BA$ per ogni $A \in V$, allora B è multipla dell'identità.

Definizioni: applicazione, funzione, immagine di un'applicazione.

Esempio di applicazione: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, con $f(x) = x^2$.

Esempio di applicazione: $f : \mathbf{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbf{R}$, con $f(x) = \sqrt{x}$.

Esempio di applicazione: $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, con $L(X) = A \cdot X$ per ogni $X \in \mathbf{R}^3$, con $A \in \mathbf{R}^3$ assegnato.

Esempio di applicazione: $F : S \to K^n$, con $F(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$. Esempio di rappresentazione parametrica di una retta nel 2-spazio: $F(t) = (t, 2t + 5)$.

Definizione di applicazione composta $G \circ F$.

Esempio di applicazione composta: $G \circ F$, con $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $F(t) = (t, t^2)$ e $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $G(x, y) = xy$. In questo caso è definita anche $F \circ G$.

Definizione di applicazione lineare.

Esempio di applicazione lineare: siano dati V spazio vettoriale su K, una base $\{v_1, ..., v_n\}$ di V e l'applicazione $F : V \to K^n$ definita, per ogni $v \in V$, $v = x_1v_1 + \cdots x_nv_n$, da $F(v) = (x_1, ..., x_n)$. Provato che F è lineare.

Esercizio svolto: $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definito da $F(x, y, z) = (x, y)$ è lineare. Si tratta della proiezione sul piano (x, y). In generale le proiezioni sono applicazioni lineari.

Esercizio: dati $A \in \mathbf{R}^3$ e l'applicazione $L_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da $L_A(X) = X \cdot A$ per ogni $X \in \mathbf{R}^3$, provare che L_A è lineare.

Lezione 11 - 15 novembre 2006

Esercizio svolto: siano date la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ e l'applicazione $L_A : K^n \to K^m$ definita da $L_A(X) = AX$ per ogni $X \in K_n$ vettore colonna. Dimostrare che L_A è lineare.

Esercizio svolto: data $F \to \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(X) = X + A$, con $A = (0, -1, 0)$, dimostrare che F non è lineare. In generale le traslazioni non sono applicazioni lineari.

Esercizio svolto: dimostrare che $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, con $F(x, y) = xy$ non è lineare.

Esercizio svolto: dimostrare che $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, con $F(x, y, z) = (|x|, 0)$ non è lineare.

Esercizio svolto: dimostrare che $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, con $F(x, y) = (2x, y - x)$ è lineare.

Esercizio svolto: dimostrare che l'applicazione identica e l'applicazione nulla sono lineari.

Dimostrato che, data un'applicazione lineare F, $F(0) = 0$.

Dimostrato che, data un'applicazione lineare F, n vettori $v_1, ..., v_n$ e n scalari $x_1, ..., x_n$, $F(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1F(v_1) + \cdots + x_nF(v_n)$.

Esercizio svolto: l'immagine di un insieme convesso attraverso una applicazione lineare è ancora un insieme convesso.

Definizione di nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.

Dimostrato che, data $F : V \to W$ applicazione lineare, $\mathrm{Im}(F)$ è un sottospazio di W, mentre $\mathrm{Ker}(F)$ è un sottospazio di V.

Teorema (dimostrato): un'applicazione lineare il cui nucleo comprenda solo il vettore nullo trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.

Esercizio: dimostrare che, dato l'insieme $\mathcal{L}(V, W)$ delle applicazioni lineari da V in W (con V e W spazi vettoriali su un corpo K) e $F, G \in \mathcal{L}$, $c \in K$, allora anche $F + G$ e cF, definiti da $(F + G)(v) = F(v) + G(v)$ e $(cF)(v) = cF(v)$ per ogni $v \in V$, sono applicazioni lineari da V in W. Dimostrare quindi che $\mathcal{L}(V, W)$ è uno spazio vettoriale sul corpo K.

Lezione 12 - 16 novembre 2006

Teorema (dimostrato): data $F : V \to W$ applicazione lineare, $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F))$. Corollario: se $\dim(V) = \dim(W)$ e $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$, allora $\mathrm{Im}(F) = W$.

Teorema (dimostrato): un'applicazione lineare è univocamente determinata dai suoi valori sugli elementi di una base.

Definizione di applicazione iniettiva, suriettiva e biiettiva. Un'applicazione lineare F è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$.

Esempio: $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, con $F(x) = (x, 0)$ è iniettiva ma non suriettiva.

Esempio: $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, con $F(x, y) = x$ è suriettiva ma non iniettiva.

Esempio: $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, con $F(x, y, z) = (x, y, 0)$ non è iniettiva e neppure suriettiva. Trovata una base per il nucleo e per l'immagine di F.

Esercizio: dire se l'applicazione $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, con $F(x, y, z) = (x, 0)$ è lineare, iniettiva, suriettiva. Trovare una base per il nucleo e per l'immagine di F.

Esercizio svolto: dire se l' applicazione $f(x) = x^2$ è lineare, iniettiva o suriettiva.

Esercizio svolto: dire se l'applicazione $f(x) = x^3$ è lineare, iniettiva, suriettiva.

Esercizio: dire se l'applicazione $f(x) = x+1$ è lineare, iniettiva, suriettiva.

Esercizio svolto: siano V, W spazi vettoriali su K, con $\dim(V) < \dim(W)$. Dimostrare che (a) non esiste nessuna applicazione lineare $F : V \to W$ suriettiva e (b) non esiste nessuna applicazione lineare $G : W \to V$ iniettiva.

Lezione 13 - 22 novembre 2006

Applicazioni invertibili. Unicità dell'applicazione inversa.

Teorema (dimostrato): un'applicazione lineare iniettiva e suriettiva è invertibile e l'inversa è essa stessa un'applicazione lineare.

Definizione di isomorfismo.

Esempio di isomorfismo: $F : U \times W \to V = U \oplus W$, con $F(u, w) = u + w$ per ogni $u \in U$ e $w \in W$.

Esempio di isomorfismo: data $\{v_1, ..., v_n\}$ base di V e un generico vettore $v \in V$, con $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$, $F(v) = (x_1, ..., x_n) \in K^n$.

Teorema (non dimostrato): se $F : V \to V'$ è un isomorfismo di spazi vettoriali, allora $\dim(V) = \dim(V') = n$.

Esercizio svolto: sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare suriettiva e sia $\dim(V) = \dim(W)$. Provare che F è un isomorfismo.

Composizione di applicazioni lineari.

Esempio in cui $F \circ G \neq G \circ F$: $F, G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, con $F(x, y, z) = (x, y, 0)$ e $G(x, y, z) = (x, z, 0)$.

Definizione di operatore.

Esercizio svolto: dimostrare che $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(x, y, z) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta, z)$ (rotazione di angolo θ attorno all'asse z)

è iniettiva e suriettiva.

Esercizio svolto: dato uno spazio vettoriale V e due applicazioni lineari $P_1, P_2 : V \to V$ tali che (i) $P_1 + P_2 = I$, (ii) $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$, (iii) $P_1^2 = P_2^2 = I$, dimostrare che $V = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \mathrm{Im}(P_2)$.

Lezione 14 - 23 novembre 2006

Applicazione lineare associata ad una matrice.

Teorema (dimostrato): se due matrici danno luogo alla stessa applicazione lineare, esse coincidono.

Esercizio: dimostrare che $L_{A+B} = L_A + L_B$ e che $L_{cA} = cL_A$.

Matrice associata ad un'applicazione lineare.

Esempio: trovare la matrice associata all'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, tale che $F(v_1) = 3w_1 - w_2 + 17w_3$ e $F(v_2) = w_1 + w_2 - w_3$, con $\{v_1, v_2\}$ base di $\mathbf{R}^2$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$ base di $\mathbf{R}^3$.

Esercizio (svolto): trovare la matrice associata all'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, con $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$.

Esercizio (svolto): trovare la matrice associata ad una rotazione antioraria di angolo θ dei vettori in $\mathbf{R}^2$.

Esercizio (svolto): trovare la matrice associata all' applicazione identica in $\mathbf{R}^2$ quando i vettori di base vengono ruotati in verso antiorario di un angolo θ.

Esercizio: trovare la matrice associata ad una rotazione oraria di angolo θ dei vettori in $\mathbf{R}^2$.

Esercizio (svolto): provare che le rotazioni in $\mathbf{R}^2$ conservano le distanze.

Esercizio: sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $F(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$. Trovare la matrice associata a tale applicazione lineare rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)\}$ di $\mathbf{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \{w_1 = (1, 3), w_2 = (2, 5)\}$ di $\mathbf{R}^2$.

Lezione 15 - 29 novembre 2006

Matrice associata ad una composizione di applicazioni lineari.

Relazione tra matrici associate alla stessa applicazione lineare relativamente a basi differenti.

Esercizio: dimostrare che $R_\theta R_{\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$ e che $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$, dove R_θ indica la rotazione antioraria di angolo θ dei vettori in $\mathbf{R}^2$.

Determinanti di matrici 2×2. Definizione e proprietà.

Determinanti di matrici $n \times n$. Proprietà.

Esercizio: sia $c \in K$ e $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$; dimostrare che $\det(cA) = c^n \det(A)$.

Regola di Cramer. Dimostrazione.

Teorema (dimostrato): dati n vettori colonna $A^1, ..., A^n \in K^n$ linearmente indipendenti, allora $\det(A^1, ..., A^n) = 0$.

Teorema (dimostrazione per esercizio): dati n vettori colonna $A^1, ..., A^n \in K^n$ tali che $\det(A^1, ..., A^n) = 0$ e un vettore colonna $B \in K^n$, allora esistono e sono univocamente determinati n scalari $x_1, ..., x_n$ tali che $x_1 A^1 + \cdots x_n A^n = B$.

Lezione 16 - 30 novembre 2006

Sviluppo di Laplace per il calcolo del determinante di una matrice $n \times n$.

Esempi numerici.

Esercizio (svolto): dimostrare che $\det(R_\theta) = 1$, dove R_θ indica la rotazione antioraria di angolo θ dei vettori in $\mathbf{R}^2$.

Esercizio (svolto): calcolare il determinante di una generica matrice $n \times n$ triangolare.

Proprietà del determinante (non dimostrate): $\det(A) = \det({}^tA)$,
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (corollario: se esiste l'inversa A^{-1} di una matrice A, allora $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$).

Teorema (dimostrato): se $\det(A) \neq 0$, la matrice A è invertibile. Formula esplicita per il calcolo di A^{-1}.

Esercizio: trovare l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Lezione 17 - 12 dicembre 2006

Determinante di un'applicazione lineare $F : V \to V$.

Esercizio: calcolare il determinante dell'applicazione lineare $F : R^3 \to R^3$, con $F(x, y, z) = (2x - 4y + z, x - 2y + 3z, 5x + y - z)$.

Definizione di prodotto scalare. Prodotti scalari non degeneri.

Esempio: prodotto scalare ordinario in K^n.

Vettori ortogonali. Complemento ortogonale.

Esercizio (svolto): il complemento ortogonale di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio di V.

Esercizio (svolto): dimostrare che, se $w \perp S$, con S sottoinsieme di V, allora $w \perp U$, con U sottospazio generato da S.

Esercizio (svolto): le soluzioni di un sistema di m equazioni lineari omogenee in n incognite costituiscono un sottospazio vettoriale di K^n.

Basi ortogonali.

Prodotti scalari definiti positivi.

Coefficienti di Fourier, proiezioni.

Esercizio (svolto): trovare i coefficienti di Fourier di un vettore $v \in V$ rispetto ai vettori v_i $(i = 1, ..., n)$ di una base ortogonale in V.

Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (dimostrato).

Lezione 18 - 13 dicembre 2006

Norma di un vettore. Proprietà della norma.

Esercizio (svolto): trovare una base ortonormale per lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -2, 0, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -1, 2)$ (si consideri l'ordinario prodotto scalare in $\mathbf{R}^4$).

Esercizio: trovare una base ortonormale per lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ (si consideri l'ordinario prodotto scalare in $\mathbf{R}^3$).

Esercizio (svolto): dati uno spazio vettoriale V su $\mathbf{R}$ ($\dim(V) = n$) e una base ortonormale per V, calcolare il prodotto scalare $\langle v, w\rangle$, con v, w generici vettori in V. Quale è la relazione con il prodotto scalare ordinario in $\mathbf{R}^n$?

Prodotti hermitiani. Esempio: dati $X = (x_1, ..., x_n)$, $Y = (y_1, ..., y_n)$ $\in \mathbf{C}^n$, $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$.

Esercizio (svolto): dati uno spazio vettoriale V su $\mathbf{C}$ ($\dim(V) = n$) e una base ortonormale per V, calcolare il prodotto hermitiano $\langle v, w\rangle$, con v, w generici vettori in V. Quale è la relazione con il prodotto hermitiano ordinario in $\mathbf{C}^n$?

Lezione 19 - 14 dicembre 2006

Teorema (dimostrato): dati uno spazio vettoriale V su $\mathbf{R}$ dotato di prodotto scalare definito positivo (o uno spazio vettoriale V su $\mathbf{C}$ dotato di prodotto hermitiano definito positivo) e un sottospazio W di V, provare che $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V)$ e che $V = W \oplus W^{\perp}$.

Esempio: $V = \mathbf{R}^3$, W generato da $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$. Risulta che $\dim(W^{\perp}) = 1$ e che una base per $W^{\perp}$ è costituita dal vettore $v_3 = (0, 0, 1)$. Interpretazione geometrica.

Esercizio (svolto): dato lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ sul corpo $\mathbf{R}$, dimostrare che $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB)$ è un prodotto scalare. È definito positivo?

È non degenere?

Esercizio (svolto): Con riferimento all'esercizio precedente, trovare il complemento ortogonale del sottospazio delle matrici $n \times n$ diagonali.

Prodotti scalari non definiti positivi.

Esempio: $V = \mathbf{R}^2$, $\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 - y_1 y_2$, con $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ vettori in $\mathbf{R}^2$. Dimostrato che, dato questo prodotto scalare e il sottospazio $W = \{cw,\ w = (1,1),\ c \in \mathbf{R}\}$, è $V \neq W \oplus W^\dagger$.

Metodo di ortogonalizzazione per prodotti scalari non definiti positivi (teorema dimostrato).

Lezione 20 - 20 dicembre 2006

Definizioni di funzionale e spazio duale.

Esempi di funzionali.

Teorema (non dimostrato): la dimensione dello spazio duale $V^\star$ di uno spazio vettoriale V è uguale alla dimensione di V.

Definizione di $\mathrm{Perp}_{V^\star}(W)$, con W sottospazio di V.

Teorema (non dimostrato): dato W sottospazio di V, con $\dim(V) = n$, $\dim(W) + \dim(\mathrm{Perp}_{V^\star}(W)) = n$.

Teorema (dimostrato): dato uno spazio vettoriale V e un prodotto scalare non degenere in V, è possibile stabilire un isomorfismo tra i vettori $v \in V$ e i funzionali $L_v \in V^\star$, con $L_v(w) \equiv \langle v, w \rangle$ per ogni w in V.

Teorema (dimostrato): dato W sottospazio di V, con $\dim(V) = n$, e dato un prodotto scalare non degenere in V, $\dim(W) + \dim(\mathrm{Perp}_V(W)) = n$.
Esercizio (svolto): dati $V = \mathbf{C}^2$, il prodotto scalare $\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$, con $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ appartenenti a V e il sottospazio $W = \{\alpha v,\ v = (1, i),\ \alpha \in \mathbf{C}\}$, dimostrare che $W = \mathrm{Perp}_V(W)$, cosí che $\dim(W) + \dim(\mathrm{Perp}_V(W)) = 2 = \dim(V)$ ma $V \neq W \oplus \mathrm{Perp}_V(W)$.

Caratteristica (rango) per righe e per colonne di una matrice.

Dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee (teorema dimostrato).

Lezione 21 - 21 dicembre 2006

Sistema di equazioni lineari non omogenee: dimensione dell'insieme delle soluzioni.

Esercizio (svolto): determinare la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Teorema di Rouché-Capelli (dimostrato).

Esercizio (svolto): determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, la risolubilità e la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (5-\lambda)x - 2y - z = 1, \\ -2x + (2-\lambda)y - 2z = 2, \\ -x - 2y + (5-\lambda)z = 1. \end{cases}$$

Dove possibile, risolvere il sistema usando il metodo di Cramer.

Esercizio: si consideri il sistema lineare dato dalle equazioni

$$\begin{cases} (1-t)x + 2y - tz = t, \\ x - ty + 2z = 1, \end{cases}$$

con t parametro reale. Studiare la dimensione dell'insieme delle soluzioni al variare di t.

Esercizio: descrivere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, nucleo ed immagine dell'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k & k & 4 \\ 3 & 3 & 3k \end{pmatrix}.$$

Risolvere il sistema lineare $Av = b$, con $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $(x, y, z \in \mathbf{R})$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lezione 22 - 10 gennaio 2007

Applicazioni bilineari. Forme bilineari.

Esempio: il prodotto scalare in K^n.

Esempio: $g(u, v) = \phi(u)\psi(v)$, con $u, v \in V$ e $\phi(u), \psi(v)$ funzionali.

Esempio: $g_C(X, Y) = {}^tXCY$, con $X, Y \in K^n$ e C matrice $n \times n$ su K. Dimostrato che g_c è la forma nulla se e soltanto se $C = 0$.

Forme bilineari simmetriche.

Teorema (dimostrato): una matrice $n \times n$ C in K rappresenta una forma bilineare simmetrica se e soltanto se C è una matrice simmetrica.

Costruzione della matrice C associata ad una forma bilineare e viceversa.

Cambiamento della matrice C associata ad una forma bilineare sotto cambiamento di coordinate.

Esercizio: data la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

associata ad una forma bilineare rispetto ad una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, trovare la matrice C' associata alla stessa forma bilineare rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ ottenuta da $\mathcal{B}$ mediante una rotazione di angolo θ del piano (x, y).

Forma quadratica $f(v)$ determinata da una forma bilineare $g(u, v)$.

Dimostrate le identità $g(v, w) = \frac{1}{4}[f(v + w) - f(v - w)]$ e $g(v, w) = \frac{1}{2}[f(v + w) - f(v) - f(w)]$.

Esercizio: data la forma quadratica $f(X) = 2x^2 + 3xy + y^2$, con $X = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, trovare la matrice associata alla forma bilineare simmetrica che determina la forma quadratica f.

Lezione 23 - 11 gennaio 2007

Operatori simmetrici.

Esempio: $V = \mathbf{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$; trovare $f(X, Y) = \langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle$, con $X, Y \in V$.

Esercizio (svolto): sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo $\mathbf{R}$, in V sia dato un prodotto scalare definito positivo e sia V somma diretta di un sottospazio $W \neq \{0\}$ e del suo complemento ortogonale. Detto P l'operatore di proiezione su W, dimostrare che P è simmetrico e non negativo.

Operatore aggiunto.

Operatori hermitiani e matrici hermitiane. Esempi di matrici hermitiane

Operatori unitari reali (ortogonali).

Teorema (dimostrato): un'operatore è unitario se e solo se conserva la norma dei vettori.

Matrici ortogonali.

Esercizio (svolto): la matrice R_θ che descrive una rotazione di angolo θ in $\mathbf{R}^2$ è ortogonale.

Operatori unitari (complessi).

Matrici unitarie (complesse).

Esercizio (svolto): dato A operatore unitario e $\{v_1, ..., v_n\}$ base ortonormale di V, anche $\{Av_1, ..., Av_n\}$ è una base ortonormale di V.

Esercizio (svolto): dati V spazio vettoriale su $\mathbf{R}$, due basi ortonormali $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, ..., w_n\}$ e l'operatore $A : V \to V$ tale che $Av_i = w_i$ per $i = 1, ..., n$, dimostrare che A è un operatore unitario reale.

Lezione 24 - 17 gennaio 2007

Indice di nullità.

Teorema (dimostrato): una forma bilineare è non degenere se e solo se l'indice di nullità è uguale a zero.

Teorema di Sylvester (dimostrato). Indice di positività.

Esercizio: trovare indice di positività e di nullità della forma bilineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Polinomi. Polinomi come spazi vettoriali. Prodotto di due polinomi.

Teorema: se due polinomi $f(t)$ e $g(t)$ sono uguali per ogni t, allora sono uguali anche i coefficienti dei due polinomi.

Grado di un polinomio. Polinomi lineari. Grado del prodotto di due polinomi.

Radice di un polinomio.

Teorema: un polinomio con coefficienti complessi con grado maggiore di zero ha almeno una radice in campo complesso.

Teorema: un polinomio di grado n in campo complesso ha n radici in $\mathbf{C}$.

Molteplicità delle radici di un polinomio.

Lezione 25 - 18 gennaio 2007

Polinomi di matrici. Esempi e proprietà.

Teorema (dimostrato): data A matrice $n \times n$ sul corpo K, esiste un polinomio non nullo f tale che $f(A) = 0$.

Autovalori ed autovettori di un operatore. Definizione.

Autovalori ed autovettori di una matrice $n \times n$. Definizione.

Esempio: trovare autovalori ed autovettori di una matrice diagonale.

Definizione di autospazio V_λ relativo all'autovalore λ.

Teorema (dimostrato): autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Teorema (dimostrato): λ è autovalore di un operatore A se e solo se $A-\lambda I$ non è invertibile.

Teorema (dimostrato): dato un operatore A in uno spazione vettoriale V su $\mathbf{C}$, con $\dim(V) \geq 1$, esiste un autovettore di A.

Matrice associata ad un operatore rispetto ad una base di autovettori.

Operatori (e matrici) diagonalizzabili.

Esercizio (svolto): trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Polinomio caratteristico: definizione ed esempi.

Teorema (dimostrato) λ è un autovalore di una matrice A se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico di A.

Esercizio (svolto): trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio: trovare autovalori ed autovettori della seguente matrice: $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Esercizio: trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lezione 26 - 24 gennaio 2007

Esercizio (svolto): trovare autovalori ed autovettori della matrice di rotazione $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Esercizio (svolto): trovare gli autovalori di una matrice diagonale.

Esercizio (svolto): trovare gli autovalori di una matrice triangolare.

Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore.

Esercizio (svolto): dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a \neq 0$, è diagonalizzabile.

Teorema (dimostrato): date due matrici $n \times n$ A e B, con B invertibile, abbiamo $p_A(\lambda) = p_{B^{-1}AB}(\lambda)$.

Ventaglio. Base a ventaglio. Matrice (triangolare superiore) associata ad un operatore relativamente ad una base a ventaglio.

Operatori triagolabili. Matrici triangolabili.

Teorema: dato un operatore A definito in uno spazio vettoriale complesso, esiste un ventaglio per A.

Teorema di Hamilton-Cayley (dimostrato).

Proprietà degli autovalori di un'applicazione unitaria.

Lezione 27 - 25 gennaio 2007

Teorema (dimostrato): dato V spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ dotato di prodotto hermitiano definito positico e A applicazione unitaria da V in V, esiste una base ortonormale di V costituita da autovettori di A.

Teorema spettrale, caso reale (dimostrato). Corollario (dimostrato): data A matrice simmetrica reale $n \times n$, esiste una matrice unitaria reale $n \times n$ U tale che ${}^tUAU$ sia una matrice diagonale.

Esercizio (svolto): data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, trovare una base spettrale di $\mathbf{R}^2$.

Teorema spettrale, caso complesso.

Esercizio (svolto): trovare una trasformazione di similitudine che diagonalizzi la matrice $\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.