CORSO ALGEBRA LINEARE 2007/08

Modalità d'esame

Gli appelli d'esame saranno tenuti durante i periodi di sospensione della didattica (fine gennaio – fine febbraio, metà giugno – fine luglio, settembre).

L'esame consisterà di una prova scritta ed una prova orale, entrambe obbligatorie.

La prova scritta consisterà nella soluzione di esercizi sugli argomenti svolti a lezione. Non è ammesso l'uso di libri di testo, eserciziari od appunti. L'esito della prova scritta concorre alla valutazione finale. Nel caso di prova scritta insufficiente, si consiglia la ripetizione della medesima prima di sostenere la prova orale.

Per la prova orale è richiesto allo studente di dimostrare la comprensione e la padronanza degli argomenti trattati durante il corso. Viene inoltra richiesta la preparazione di cinque dimostrazioni di teoremi a scelta tra quelli trattati a lezione. Tali teoremi devono riguardare argomenti differenti del corso.

La prova scritta, se sufficiente, rimane valida per tutti gli appelli dell'anno di corso.

Testo di riferimento

Serge Lang, *Algebra lineare*, Boringhieri.

Altro testo utile per il corso

Marco Abate, *Algebra lineare*, McGraw-Hill.

Lezione 1 - 3 ottobre 2007

Terminologia: insieme, sottoinsieme, intersezione ed unione di insiemi.

Vettori in $\mathbf{R}^n$. Punto in un n-spazio. Addizione di punti (vettori) e moltiplicazione per una costante. Proprietà associativa, commutativa e distributiva dell'addizione di vettori. Il vettore nullo in $\mathbf{R}^n$. Interpretazione geometrica dell'addizione di vettori (regola del parallelogramma). Vettori applicati. Vettori equivalenti.

Prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$: definizione e dimostrazione delle sue proprietà.

Esercizio: $(A+B)^2 = A^2 + 2A\cdot B + B^2$, $(A-B)^2 = A^2 - 2A\cdot B + B^2$.

Lezione 2 - 4 ottobre 2007

Dimostrazione disuguaglianza di Schwarz.

Norma di un vettore.

Dimostrazione disuguaglianza triangolare.

Vettori unità.

Distanza fra due vettori: definizione e interpretazione geometrica.

Perpendicolarità: definizione e interpretazione geometrica.

Proiezione di un vettore su di un altro: definizione e interpretazione geometrica.

Angolo fra due vettori: definizione e interpretazione geometrica.

Esercizio svolto: dimostrare che, se due vettori non nulli A e B hanno stessa direzione e verso, allora il coseno dell'angolo θ fra essi compreso vale $+1$. Dimostrare che, se invece i due vettori hanno stessa direzione ma verso opposto, allora $\cos\theta = -1$.

Esercizio svolto: siano $A_1, ..., A_r$ vettori non nulli e mutuamente perpendicolari in $\mathbf{R}^n$. Siano $c_1, ..., c_r \in \mathbf{R}$ tali che $c_1A_1 + \cdots + c_rA_r = 0$. Dimostrare che $c_1 = \cdots = c_r = 0$.

Lezione 3 - 10 ottobre 2007

Esercizio svolto: trovare in $\mathbf{R}^2$ l'intersezione della retta passante per il punto $P = (1, 1)$ e avente direzione $A = (2, 1)$ con la retta passante per $P' = (2, 0)$ e avente direzione $A' = (0, 1)$.

Equazione parametrica di un piano in $\mathbf{R}^3$; vettori di giacitura del piano.

Esercizio svolto: scrivere l'equazione parametrica del piano passante per il punto $P = (1, 2, 3)$ e avente come vettori di giacitura $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$.

Vettori in $\mathbf{C}^n$. Definizione e proprietà del prodotto hermitiano di vettori in $\mathbf{C}^n$.

Differenze tra prodotto scalare e hermitiano in $\mathbf{C}^n$.

Definizione di corpo. Esempi: corpo dei numeri complessi, dei numeri reali e dei numeri razionali. I numeri interi non costituiscono un corpo.

Esercizio: dimostrare che $K = \{x \in \mathbf{C}, x = a + ib, a, b \in \mathbf{Q}\}$ è un corpo.

Definizione di spazio vettoriale V su un corpo K.

Esercizio svolto: il vettore nullo è univocamente determinato.

Esercizio: dimostrare che $V = K^n$ su K è uno spazio vettoriale.

Definizione di sottospazio vettoriale.

Esercizio svolto: $W = \{\lambda v, \lambda \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio vettoriale in $\mathbf{R}^2$ su $\mathbf{R}$.

Esercizio svolto: se W_1 e W_2 sono sottospazi di V, anche l'intersezione di W_1 e W_2 è un sottospazio di V.

Lezione 4 - 11 ottobre 2007

Esercizio svolto: dimostrare che, se $V = \mathbf{R}^n$ spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e $W = \{X \in \mathbf{R}^n \text{ t.c. } X = (x_1, ..., x_{n-1}, 0)\}$, allora W è un sottospazio di V. Visualizzazione geometrica casi particolari $n = 2$ e $n = 3$.

Definizione di combinazione lineare di vettori.

Esercizio svolto: se $v_1, ..., v_n \in V$, l'insieme $\mathrm{Span}(v_1, ..., v_n)$ delle combinazioni lineari di tali vettori costituisce un sottospazio di V.

Esempio: $V = \mathbf{R}^3$, $v_1 = (3, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$. Interpretazione geometrica di $\mathrm{Span}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$.

Esempio: $V = \mathbf{R}^3$, $v_1 = (3, 1, 0)$, $v_2 = (-1, -1, 0)$, $v_3 = (2, 0, 0)$. Notare che $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$.

Definizione di spazio vettoriale delle funzioni $f : S \to K$, con S insieme e K corpo. Definizione di $f + g$ e cf, con $f, g \in V$ e $c \in K$.

Definizione di indipendenza e dipendenza lineare di vettori.

Esercizio svolto: in $V = \mathbf{R}^n$ su $\mathbf{R}$ i vettori $e_1 = (0, 1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$,..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che se due dei vettori $v_1, ..., v_n$ sono uguali allora i vettori $v_1, ..., v_n$ sono linearmente dipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che due vettori v_1 e v_2 sono indipendenti se e solo se uno di loro è multiplo dell'altro, cioé $v_1 = kv_2$, con $k \in K$. Interpretazione geometrica in $\mathbf{R}^2$.

Esercizio svolto: dimostrare che un insieme di vettori $\{v_1, ..., v_n\}$ che comprende un sottoinsieme di vettori $\{v_1, ..., v_k\}$ (con $1 \leq k \leq n$) linearmente dipendenti è esso stesso dipendente. Dimostrare quindi che qualsiasi sottoinsieme di un sistema indipendente di vettori è indipendente.

Esercizio svolto: se uno dei vettori $v_1, ..., v_n$ è il vettore nullo, allora tali vettori sono linearmente dipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che nello spazio $V = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ le funzioni $f_1(t) = e^t$ e $f_2(t) = e^{2t}$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che nello spazio $V = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ le funzioni $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ e $f_3(t) = 2 + 2t$ sono linearmente dipendenti.

Lezione 5 - 17 ottobre 2007

Definizione di base di V.

Definizione di coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base $\{v_1, ..., v_n\}$.

Esercizio svolto: dimostrare che, se $v_1, ..., v_n$ linearmente indipendenti e $\sum_i x_i v_i = \sum_i y_i v_i$, allora $x_i = y_i$ per tutti gli $i \in [1, n]$.

Isomorfismo tra gli spazi vettoriali V sul corpo K, avente una base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$, e K^n.

Esercizio svolto: dimostrare che $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-3, 2)$ costituiscono una base per $V = \mathbf{R}^2$ su $\mathbf{R}$.

Esercizio svolto: dato lo spazio vettoriale $V = \mathbf{R}^2$ su $\mathbf{R}$, trovare le coordinate di $v = (1, 0)$ rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (-1, 2)\}$ e $\mathcal{B}' = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$.

Esercizio: dato lo spazio vettoriale $V = \mathbf{R}^3$ su $\mathbf{R}$, dimostrare che $v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$ sono vettori linearmente indipendenti.

Esercizio: dimostrare che $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -1)$ costituiscono una base per $V = \mathbf{R}^3$ su $\mathbf{R}$ e trovare le coordinate di $v = (0, 0, 1)$ rispetto a tale base.

Esercizio: dimostrare che nello spazio $V = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ le funzioni $f_1(t) = \sin t$ e $f_2(t) = \sin(2t)$ sono linearmente indipendenti.

Definizione di sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti.

Teorema (dimostrato): se $\{v_1, ..., v_n\}$ generano V e $\{v_1, ..., v_r\}$ sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti, allora $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_r\}$ è una base per V.

Teorema (dimostrato): due basi di uno spazio vettoriale hanno il medesimo numero di elementi.

Esercizio svolto: dimostrare che i vettori $e_1 = (0, 1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$ costituiscono una base per $V = \mathbf{R}^n$ su $\mathbf{R}$, da cui $\dim(\mathbf{R}^n) = n$.

Lezione 6 - 18 ottobre 2007

Esempio di spazio vettoriale: i polinomi $P(t)$ di grado $\leq n$, con $t \in \mathbf{R}$.

Esercizio svolto: dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_0 = 1, v_1 = t, ..., v_n = t^n\}$ è una base per lo spazio vettoriale dei polinomi $P(t)$ di grado $\leq n$. Quindi tale spazio vettoriale ha dimensione $n + 1$.

Esercizio: $\mathcal{B} = \{v_0 = 1, v_1 = t + 1, v_2 = t^2 + t + 1\}$ è una base per spazio vettoriale dei polinomi $P(t)$ di grado ≤ 2. Trovare quindi le coordinate del vettore $v = 2t^2 - 5t + 6$ rispetto a tale base.

Esercizio svolto: dimostrare che lo spazio vettoriale di tutti i polinomi $P(t)$ (di grado qualsiasi) non ha dimensione finita.

Definizione di insieme massimale di elementi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V.

Teorema (dimostrato): un insieme massimale di elementi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V è una base di V.

Esercizio: dimostrare che se W sottospazio di V e $\dim(W) = \dim(V)$, allora $W = V$.

Teorema del completamento della base (dimostrato).

Esercizio: trovare una base per il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato da $v_1 = (1,2,0,2)$, $v_2 = (2,1,1,0)$ e $v_3 = (5,4,2,2)$.

Definizione di somma di due sottospazi.

Esercizio svolto: la somma $U + W$ di due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V è un sottospazio di V.

Definizione di somma diretta di due sottospazi.

Teorema (dimostrato): se U, W sottospazi di V, $V = U+W$ e l'intersezione di U e W comprende il solo vettore nullo, allora $V = U \oplus W$.

Teorema (dimostrato): se W sottospazio di V, allora esiste U sottospazio di V tale che $V = U \oplus W$. Tale sottospazio U non è univocamente determinato. Esempio: $V = \mathbf{R}^2$, W sottospazio generato da $v_1 = (2,1)$. Definendo U come il sottospazio generato da $v_2 = (0,1)$, abbiamo $V = W \oplus U$. D'altra parte, definendo U' come il sottospazio generato da $v_2' = (1,1)$ abbiamo anche $V = W \oplus U'$. Interpretazione geometrica del risultato.

Esercizio svolto: se $V = U \oplus W$, allora $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$.

Esercizio: mostrare che, dati due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V, $U \cup W$ in generale non è un sottospazio di V.

Lezione 7 - 24 ottobre 2007

Esercizio svolto: dati U e W sottospazi di V, provare che $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$. Esempio geometrico: $V = \mathbf{R}^3$ ($\dim(V) = 3$), $U = \{(a,b,0),\ a,b \in \mathbf{R}\}$ (piano xy), $W = \{(0,c,d),\ c,d \in \mathbf{R}\}$ (piano yz). Verificato che $\dim(U) = \dim(W) = 2$, $U + W = V$, $U \cap W = \{(0,k,0),\ k \in \mathbf{R}\}$ (asse y, $\dim(U \cap W) = 1$). Osservazione: $U \cup W$ non è un sottospazio.

Definizione di matrice $m \times n$ sul corpo K. Vettori riga e vettori colonna. Esempi numerici.

Addizione di matrici, moltiplicazione di una matrice per uno scalare.

Matrice zero.

Le matrici $m \times n$ con elementi di matrice in K costituiscono uno spazio vettoriale su K, chiamato $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Esempio: le matrici

$$\left\{ e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

costituiscono una base per $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$.

Definizioni ed esempi: matrice quadrata, matrice trasposta, matrice diagonale, matrice identità, matrice simmetrica, matrice antisimmetrica, matrice triangolare superiore ed inferiore.

Esercizio: dimostrare che, per ogni $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$, ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

Esercizio: dimostrare che, per ogni $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ e per ogni $c \in K$, ${}^t(cA) = c\, {}^tA$.

Esercizio: trovare una base per le matrici $n \times n$ triangolari superiori

Lezione 8 - 25 ottobre 2007

Esercizio: dimostrare che le matrici $n \times n$ simmetriche costituiscono un sottospazio di $\mathcal{M}_{n,n}$.

Esercizio: dimostrare che le matrici $n \times n$ antisimmetriche costituiscono un sottospazio di $\mathcal{M}_{n,n}$.

Esercizio svolto: trovare una base per lo spazio delle matrici $n \times n$ simmetriche. Esempio: $n = 2$.

Esercizio svolto: trovare una base per lo spazio delle matrici $n \times n$ antisimmetriche. Esempio: $n = 2$.

Esercizio svolto: sia $V = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, U il sottospazio delle matrici reali $n \times n$ simmetriche e W il sottospazio delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche. Provare che $V = U \oplus W$.

Esercizio: sia $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, $U = \{A \in V, a_{21} = a_{22} = 0\}$, $W = \{A \in V, a_{12} = a_{22} = 0\}$. Trovare una base per i sottospazio $U + W$ e $U \cap W$. Verificare che $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Definizioni: sistema di equazioni lineari, sistema omogeneo e non omogeneo, soluzioni banali e non banali.

Teorema (dimostrato): sia dato un sistema omogeneo di m equazioni lineari in n incognite, con $n > m$, e i cui coefficienti siano elementi di un corpo K. Allora il sistema possiede soluzioni non banali in K.

Teorema (dimostrato): sia dato un sistema di n equazioni lineari in n incognite e siano i vettori $A^1, ..., A^n$ linearmente indipendenti. Allora il sistema possiede un'unica soluzione in K.

Esercizio (svolto): sia dato un sistema omogeneo di n equazioni lineari in n incognite e siano le colonne $A^1, ..., A^n$ linearmente indipendenti. Allora il sistema ammette solo la soluzione banale.

Esercizio (svolto): l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo di equazioni lineari sul corpo K è uno spazio vettoriale su K.

Definizione di prodotto di matrici. Esempi.

Esempio numerico di matrici A, B tali che A e B non commutano, cioé $AB \neq BA$.

Lezione 9 - 31 ottobre 2007

Proprietà del prodotto di matrici : $A(B + C) = AB + AC$, $A(BC) = (AB)C$. Dimostrazioni ed esempi.

Definizione di matrice inversa. Dimostrato che la matrice inversa, se esiste, è univocamente determinata.

Esercizio svolto: dimostrare che ${}^t(AB) = {}^tB^tA$.

Esercizio svolto: dimostrare che ${}^t(ABC) = {}^tC^tB^tA$. Generalizzazione: ${}^t(A_1 \cdots A_k) = {}^tA_k \cdots {}^tA_1$.

Esercizio svolto: Sia A una matrice $n \times n$ invertibile. Dimostrare che ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

Traccia di una matrice $n \times n$: definizione ed esempi.

Esercizio svolto: dimostrare che, se A e B sono matrici $n \times n$, allora $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Esercizio: data la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, dimostrare che A ammette inversa se e solo se $ad - bc \neq 0$.

Esercizio: si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 sul corpo reale. Dimostrare che, se $B \in V$ e $AB = BA$ per ogni $A \in V$, allora B è multipla dell'identità.

Lezione 10 - 7 novembre 2007

Definizioni: applicazione, funzione, immagine di un'applicazione.

Esempio di applicazione: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, con $f(x) = x^2$.

Esempio di applicazione: $f : \mathbf{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbf{R}$, con $f(x) = \sqrt{x}$.

Esempio di applicazione: $F : S \to K^n$, con $F(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$. Esempio di rappresentazione parametrica di una retta nel 2-spazio: $F(t) = (t, 2t + 5)$.

Definizione di applicazione composta $G \circ F$.

Esempio di applicazione composta: $G \circ F$, con $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $F(t) = (t, t^2)$ e $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $G(x, y) = xy$. In questo caso è definita anche $F \circ G \neq G \circ F$.

Definizione di applicazione lineare.

Esempio di applicazione lineare: siano dati V spazio vettoriale su K, una base $\{v_1, ..., v_n\}$ di V e l'applicazione $F : V \to K^n$ definita, per ogni $v \in V$, $v = x_1 v_1 + \cdots x_n v_n$, da $F(v) = (x_1, ..., x_n)$. Provato che F è lineare.

Esercizio svolto: $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definito da $F(x, y, z) = (x, y)$ è lineare. Si tratta della proiezione sul piano (x, y). In generale le proiezioni sono applicazioni lineari. Dato $V = U \oplus W$, per ogni $v \in V$ sono univocamente determinati $u \in U$ e $w \in W$ tali che $v = u + w$. Definiamo $P(v) = u$. Dimostrare che P è un'applicazione lineare.

Esercizio svolto: dati $A \in \mathbf{R}^3$ e l'applicazione $L_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da $L_A(X) = X \cdot A$ per ogni $X \in \mathbf{R}^3$, provare che L_A è lineare.

Esercizio svolto: siano date la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ e l'applicazione $L_A : K^n \to K^m$ definita da $L_A(X) = AX$ per ogni $X \in K_n$ vettore colonna. Dimostrare che L_A è lineare.

Esercizio svolto: data $F \to \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(X) = X + A$, con $A = (0, -1, 0)$, dimostrare che F non è lineare. In generale le traslazioni non sono applicazioni lineari.

Esercizio svolto: dimostrare che $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, con $F(x, y) = (2x, y - x)$ è lineare.

Esercizio svolto: dimostrare che $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, con $F(x, y) = xy$ non è lineare.

Esercizio svolto: dimostrare che l'applicazione identica e l'applicazione nulla sono lineari.

Esercizio svolto: dimostrare che $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, con $F(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$ non è lineare. Viene infatti soddisfatta la proprietà di omogeneità ma non quella di additività.

Esercizio: dimostrare che $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, con $F(x, y, z) = (|x|, 0)$ non è lineare.

Esercizio: dire se $T : \mathcal{M}_{m,n}(K) \to \mathcal{M}_{n,m}(K)$, definita da $T(A) = {}^tA$ per ogni $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ è lineare.

Esercizio: dato $P_2[t]$ spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a due, dire se l'applicazione T, definita da $[T(p)](t) = p(t + 1)$ per ogni $p \in P_2$ è lineare.

Esercizio: dato l'insieme $\mathcal{L}(V, V')$ delle applicazioni lineari da V in V', con V, V' spazi vettoriali su K e prese due qualsiasi applicazioni lineari $F, G \in$

$\mathcal{L}(V, V')$ e un qualsiasi scalare $c \in K$, dimostrare che $F+G$, definito da $(F+G)(u) = F(u)+G(u)$ per ogni $u \in V$ e cF, definito da $(cF)(u) = cF(u)$ per ogni $u \in V$, sono applicazioni lineari. Verificare quindi che $\mathcal{L}(V, V')$ è uno spazio vettoriale.

Lezione 11 - 8 novembre 2007

Dimostrato che, data un'applicazione lineare F, $F(0) = 0$.

Dimostrato che, data un'applicazione lineare F, n vettori $v_1, ..., v_n$ e n scalari $x_1, ..., x_n$, $F(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1F(v_1) + \cdots + x_nF(v_n)$.

Teorema (dimostrato): un'applicazione lineare è univocamente determinata dai suoi valori sugli elementi di una base.

Definizione di nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.

Dimostrato che, data $F : V \to W$ applicazione lineare, $\mathrm{Im}(F)$ è un sottospazio di W, mentre $\mathrm{Ker}(F)$ è un sottospazio di V.

Teorema (dimostrato): un'applicazione lineare il cui nucleo comprenda solo il vettore nullo trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.

Esercizio svolto: un'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ il cui nucleo comprenda solo il vettore nullo trasforma un iperpiano in $\mathbf{R}^m$ in un iperpiano in $\mathbf{R}^n$.

Esercizio: dimostrare che, data $T : V \to W$ applicazione lineare e $\mathcal{B} = \{v_1, ..., n_n\}$ base di V, risulta $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}(T(v_1), ..., T(v_n))$.

Teorema (dimostrato): data $F : V \to W$ applicazione lineare, $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F))$.

Definizione di applicazione iniettiva, suriettiva e biiettiva. Un'applicazione lineare F è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$.

Esercizio svolto: dire se l'allplicazione $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, con $F(x) = (x, 0)$ è lineare, iniettiva, suriettiva. Trovare una base per il nucleo e per l'immagine di F.

Esercizio: dire se l'allplicazione $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, con $F(x, y) = (x)$ è lineare, iniettiva, suriettiva. Trovare una base per il nucleo e per l'immagine di F.

Esercizio: dire se l'allplicazione $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, con $F(x, y, z) = (x, y, 0)$ è lineare, iniettiva, suriettiva. Trovare una base per il nucleo e per l'immagine di F.

Esercizio svolto: dire se l' applicazione $f(x) = x^2$ è lineare, iniettiva, suriettiva.

Esercizio: dire se l' applicazione $f(x) = x^3$ è lineare, iniettiva, suriettiva.

Lezione 12 - 14 novembre 2007

Esercizio svolto: siano V, W spazi vettoriali su K, con $\dim(V) < \dim(W)$. Dimostrare che (a) non esiste nessuna applicazione lineare $F : V \to W$ suriettiva e (b) non esiste nessuna applicazione lineare $G : W \to V$ iniettiva.

Applicazioni invertibili. Unicità dell'applicazione inversa.

Teorema (dimostrato): un'applicazione lineare iniettiva e suriettiva è invertibile e l'inversa è essa stessa un'applicazione lineare.

Definizione di isomorfismo.

Esempio di isomorfismo: $T : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^{mn}$, definita da $T(A) = (A_1, A_2, ..., A_m)$, con A_i i-esima riga della matrice A.

Esercizio: dimostrare che $T : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$, definita da $T(A) = {}^tA$, è un isomorfismo e trovare T^{-1}.

Esempio di isomorfismo: data $\{v_1, ..., v_n\}$ base di V e un generico vettore $v \in V$, con $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$, $F(v) = (x_1, ..., x_n) \in K^n$.

Teorema (non dimostrato): se $F : V \to V'$ è un isomorfismo di spazi vettoriali, allora $\dim(V) = \dim(V') = n$.

Composizione di applicazioni lineari.

Esempio in cui $F \circ G \neq G \circ F$: $F, G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, con $F(x, y, z) = (x, y, 0)$ e $G(x, y, z) = (x, z, 0)$.

Definizione di operatore (o endomorfismo).

Esercizio svolto: dimostrare che $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da $T(x, y) = (y, 2x - y)$ è invertibile e trovare T^{-1}.

Esercizio svolto: dimostrare che $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(x, y, z) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta, z)$ (rotazione di angolo θ attorno all'asse z) è iniettiva e suriettiva.

Esercizio: dato uno spazio vettoriale V e due applicazioni lineari $P_1, P_2 : V \to V$ tali che (i) $P_1 + P_2 = I$, (ii) $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$, (iii) $P_1^2 = P_2^2 = I$, dimostrare che $V = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \mathrm{Im}(P_2)$.

Lezione 13 - 15 novembre 2007

Applicazione lineare associata ad una matrice.

Teorema (dimostrato): se due matrici danno luogo alla stessa applicazione lineare, esse coincidono.

Matrice associata ad un'applicazione lineare.

Esempio: scrivere la matrice associata alla trasformazione lineare $F: V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ (per V) e $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3\}$ (per W), con F definita da $F(v_1) = 3w_1 - w_2 + 17w_3$, $F(v_2) = w_1 + w_2 - w_3$.

Esercizio (svolto): siano $V = \mathbf{R}_2[t]$ e $W = \mathbf{R}_3[t]$ gli spazi vettoriali dei polinomi di una variabile reale di grado minore uguale a 2 (per V) e a 3 (per W), $T: V \to W$ l'applicazione lineare definita da $[T(p)](t) = tp(t+1)$ per ogni $p \in V$ e $\mathcal{B} = \{p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2\}$, $\mathcal{B}' = \{q_0(t) = 1, q_1(t) = t, q_2(t) = t^2, q_3(t) = t^3\}$ basi per V e per W. Trovare la matrice associata a T rispetto a queste basi.

Esercizio: sia $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $T(x, y, z) = (2x + 2z, x - y)$. Trovare la matrice associata a tale applicazione lineare rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1)\}$ di $\mathbf{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \{w_1 = (1,0), w_2 = (0,1)\}$ di $\mathbf{R}^2$ e rispetto alle basi $\mathcal{C} = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)\}$ di $\mathbf{R}^3$ e $\mathcal{C}' = \{q_1 = (1,0), q_2 = (1,1)\}$ di $\mathbf{R}^2$.

Esercizio: trovare la matrice associata all'applicazione lineare $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, con $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$.

Esercizio (svolto): trovare la matrice associata ad una rotazione antioraria di angolo θ dei vettori in $\mathbf{R}^2$.

Esercizio (svolto): trovare la matrice associata all' applicazione identica in $\mathbf{R}^2$ quando i vettori di base vengono ruotati in verso antiorario di un angolo θ.

Esercizio (svolto): provare che le rotazioni in $\mathbf{R}^2$ conservano le distanze.

Esercizio: dimostrare che $R_\theta R_{\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$ e che $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$, dove R_θ indica la rotazione antioraria di angolo θ dei vettori in $\mathbf{R}^2$.

Lezione 14 - 21 novembre 2007

Matrice associata ad una composizione di applicazioni lineari.

Relazione tra matrici associate alla stessa applicazione lineare relativamente a basi differenti.

Esercizio (svolto): dato $V = \mathbf{R}^2$, $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1 = (3,1), e_2 = (-1,-1)\}$ basi di V, trovare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e quella del cambiamento di base da da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Esercizio: dato $V = P_2[t]$ spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a due, $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ e $\mathcal{B}' = \{1, t-1, 2t^2 - 4t - 6\}$ basi di V, trovare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e quella del cambiamento di base da da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Determinanti di matrici 2×2. Definizione e proprietà.

Determinanti di matrici $n \times n$. Proprietà.

Esercizio (svolto): sia $c \in K$ e $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$; dimostrare che $\det(cA) = c^n \det(A)$.

Regola di Cramer. Dimostrazione.

Lezione 15 - 22 novembre 2007

Teorema (dimostrato): dati n vettori colonna $A^1, ..., A^n \in K^n$ linearmente indipendenti, allora $\det(A^1, ..., A^n) = 0$.

Corollario (dimostrato): dati n vettori colonna $A^1, ..., A^n \in K^n$ tali che $\det(A^1, ..., A^n) = 0$ e un vettore colonna $B \in K^n$, allora esistono e sono univocamente determinati n scalari $x_1, ..., x_n$ tali che $x_1 A^1 + \cdots x_n A^n = B$.

Sviluppo di Laplace per il calcolo del determinante di una matrice $n \times n$.

Esempi numerici, con riferimento alla soluzione di sistemi lineari (regola di Cramer).

Esercizio (svolto): calcolare il determinante di una generica matrice $n \times n$ triangolare.

Proprietà delle permutazioni.

Unicità del determinante e sua espressione esplicita. Caso particolare: matrici 2×2.

Lezione 16 - 28 novembre 2007

Proprietà del determinante: $\det(A) = \det({}^tA)$ (non dimostrata), $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (dimostrata) (corollario: se esiste l'inversa A^{-1} di una matrice A, allora $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$).

Teorema (dimostrato): se $\det(A) \neq 0$, la matrice A è invertibile. Formula esplicita per il calcolo di A^{-1}.

Esercizio (svolto): trovare l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Determinante di un'applicazione lineare $F : V \to V$.

Esercizio: calcolare il determinante dell'applicazione lineare $F : R^3 \to R^3$, con $F(x, y, z) = (2x - 4y + z, x - 2y + 3z, 5x + y - z)$.

Definizione di prodotto scalare. Prodotti scalari non degeneri. Prodotti scalari definiti positivi.

Esempio: prodotto scalare ordinario in K^n.

Esercizio (svolto): dato $V = \mathbf{R}^3$, dimostrare che $\langle v, w\rangle = v_1w_1 + v_1w_2 + v_2w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$ ($v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3)$ in V) è un prodotto scalare. È definito positivo?.

Esercizio (svolto): dato $V = P_2[t]$ spazio vettoriale dei polinomi di grado monire od uguale a due, dimostrare che $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$ (p, q in V) è un prodotto scalare. È definito positivo?

Lezione 17 - 29 novembre 2007

Vettori ortogonali. Complemento ortogonale.

Esercizio (svolto): il complemento ortogonale di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio di V.

Esercizio (svolto): dimostrare che, se $w \perp S$, con S sottoinsieme di V, allora $w \perp U$, con U sottospazio generato da S.

Esercizio (svolto): le soluzioni di un sistema di m equazioni lineari omogenee in n incognite costituiscono un sottospazio vettoriale di K^n.

Basi ortogonali.

Prodotti scalari definiti positivi.

Coefficienti di Fourier, proiezioni.

Esercizio (svolto): trovare i coefficienti di Fourier di un vettore $v \in V$ rispetto ai vettori v_i ($i = 1, ..., n$) di una base ortogonale in V.

Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (dimostrato).

Esercizio (svolto): trovare una base ortogonale per lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -2, 0, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -1, 2)$ (si consideri l'ordinario prodotto scalare in $\mathbf{R}^4$).

Norma di un vettore. Proprietà della norma.

Esercizio (svolto): dati uno spazio vettoriale V su $\mathbf{R}$ ($\dim(V) = n$) e una base ortonormale per V, calcolare il prodotto scalare $\langle v, w\rangle$, con v, w generici vettori in V. Quale è la relazione con il prodotto scalare ordinario in $\mathbf{R}^n$?

Prodotti hermitiani. Esempio: dati $X = (x_1, ..., x_n)$, $Y = (y_1, ..., y_n)$ $\in \mathbf{C}^n$, $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i$.

Esercizio: trovare una base ortonormale per lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, i, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ (si consideri l'ordinario prodotto hermitiano in $\mathbf{C}^3$).

Esercizio: dato lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ sul corpo $\mathbf{R}$, dimostrare che $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB)$ è un prodotto scalare. È definito positivo? È non degenere?

Esercizio: Con riferimento all'esercizio precedente, trovare il complemento ortogonale del sottospazio delle matrici $n \times n$ diagonali.

Lezione 18 - 4 dicembre 2007

Teorema (dimostrato): dati uno spazio vettoriale V su $\mathbf{R}$ dotato di prodotto scalare definito positivo (o uno spazio vettoriale V su $\mathbf{C}$ dotato di prodotto hermitiano definito positivo) e un sottospazio W di V, provare che $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$ e che $V = W \oplus W^\perp$.

Esempio: $V = \mathbf{R}^3$, W generato da $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$. Risulta che $\dim(W^\perp) = 1$ e che una base per $W^\perp$ è costituita dal vettore $v_3 = (0, 0, 1)$. Interpretazione geometrica.

Prodotti scalari non definiti positivi.

Esempio: $V = \mathbf{R}^2$, $\langle v_1, v_2\rangle = x_1x_2 - y_1y_2$, con $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ vettori in $\mathbf{R}^2$. Dimostrato che, dato questo prodotto scalare e il sottospazio $W = \{cw,\ w = (1, 1),\ c \in \mathbf{R}\}$, è $V \neq W \oplus W^\dagger$.

Metodo di ortogonalizzazione per prodotti scalari non definiti positivi (teorema dimostrato).

Definizioni di funzionale e spazio duale.

Esempi di funzionali.

Teorema (non dimostrato): la dimensione dello spazio duale $V^\star$ di uno spazio vettoriale V è uguale alla dimensione di V.

Definizione di $\mathrm{Perp}_{V^\star}(W)$, con W sottospazio di V.

Teorema (non dimostrato): dato W sottospazio di V, con $\dim(V) = n$, $\dim(W) + \dim(\mathrm{Perp}_{V^\star}(W)) = n$.

Lezione 19 - 5 dicembre 2007

Teorema (dimostrato): dato uno spazio vettoriale V e un prodotto scalare non degenere in V, è possibile stabilire un isomorfismo tra i vettori $v \in V$ e i funzionali $L_v \in V^\star$, con $L_v(w) \equiv \langle v, w\rangle$ per ogni w in V.

Teorema (dimostrato): dato W sottospazio di V, con $\dim(V) = n$, e dato un prodotto scalare non degenere in V, $\dim(W) + \dim(\mathrm{Perp}_V(W)) = n$.
Esercizio (svolto): dati $V = \mathbf{C}^2$, il prodotto scalare $\langle v_1, v_2\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$, con $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ appartenenti a V e il sottospazio $W = \{\alpha v,\ v = (1, i),\ \alpha \in \mathbf{C}\}$, dimostrare che $W = \mathrm{Perp}_V(W)$, cosí che $\dim(W) + \dim(\mathrm{Perp}_V(W)) = 2 = \dim(V)$ ma $V \neq W \oplus \mathrm{Perp}_V(W)$.

Caratteristica (rango) per righe e per colonne di una matrice.

Dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee (teorema dimostrato).

Sistema di equazioni lineari non omogenee: dimensione dell'insieme delle soluzioni.

Esercizio (svolto): determinare la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Teorema di Rouché-Capelli (dimostrato).

Lezione 20 - 19 dicembre 2007

Sistemi (lineari) triangolari superiori.

Teorema (dimostrato): un sistema (lineare) triangolare superiore $Ax = b$ ammette una sola soluzione se e solo se tutti i termini diagonali della matrice A dei coefficienti sono non nulli.

Metodo di risoluzione all'indietro.

Esercizio (svolto): si studino le soluzioni (qualora esistano) del sistema

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 3, \\ -y + 2z = 0, \\ 4z = -4. \end{cases}$$

Esercizio (svolto): si studino le soluzioni (qualora esistano) del sistema

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 8, \\ 3z = 6, \\ 2z = -2. \end{cases}$$

Esercizio (svolto): si studino le soluzioni (qualora esistano) del sistema

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 8, \\ 3z = -3, \\ 2z = -2. \end{cases}$$

Sistemi lineari equivalenti ed operazioni elementari.

Metodo di eliminazione di Gauss. Pivot del metodo di Gauss.

Esercizio (svolto): usando il metodo di Gauss si risolva il sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z - w = 1, \\ 3x + 9y + 4z + w = 1, \\ 2x + y + 5z + 2w = 0, \\ y - z - w = 2. \end{cases}$$

Sistemi a scala. Proprietà delle matrici a scala. Pivot di una matrice a scala.

Esercizio (svolto): si risolva il sistema (a scala)

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + \frac{1}{2}x_6 = 1, \\ 2x_4 - x_6 = 0, \\ x_5 + 4x_6 = 1. \end{cases}$$

Lezione 21 - 20 dicembre 2007

Riduzione a scala di un generico sistema di equazioni lineari.

Esercizio (svolto): si risolva mediante riduzione a scala il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2, \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -7. \end{cases}$$

Esercizio (svolto): discutere mediante riduzione a scala la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2, \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 7. \end{cases}$$

Applicazione del metodo di riduzione a scala: nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.

Esercizio (svolto): trovare dimensione e basi per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare rappresentata in una certa base dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Applicazione del metodo di riduzione a scala: trovare dimensione e base del sottospazio generato da un insieme di vettori.

Esercizio (svolto): trovare dimensione e base di $U = \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3)$, con $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Applicazione del metodo di riduzione a scala: completamento di una base.

Esercizio (svolto): dati i due vettori linearmente indipendenti $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$, completare la base di $\mathbf{R}^4$.

Applicazione del metodo di riduzione a scala: dimensione e base di $U+W$ e di $U \cap W$.

Esercizio (svolto): dati i sottospazi $U = \mathrm{Span}(u_1, u_2)$ e $W = \mathrm{Span}(w_1, w_2)$, con $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, trovare dimensione e base di $U + W$ e $U \cap W$.

Applicazione metodo di eliminazione di Gauss: calcolo matrice inversa.

Esercizio (svolto): trovare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Applicazione metodo di eliminazione di Gauss: calcolo dei determinanti.

Esercizio (svolto): calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Lezione 22 - 9 gennaio 2008

Applicazioni bilineari.

Applicazioni bilineari e matrici. Costruzione della matrice C associata ad una forma bilineare e viceversa.

Cambiamento della matrice C associata ad una forma bilineare sotto cambiamento di base.

Nota: la matrice associata ad un prodotto scalare definito positivo rispetto ad una base ortonormale è la matrice identità.

Teorema (dimostrato): una matrice C in K rappresenta una forma bilineare simmetrica se e soltanto se C è una matrice simmetrica.

Operatori simmetrici.

Esercizio: si consideri il prodotto scalare canonico in $\mathbf{R}^2$ e l'operatore T, definito da $T(v) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$. Dimostrare che T è simmetrico. Trovare le matrici C (C') e A (A') associate al prodotto scalare e all'endomorfismo T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ($\mathcal{B}' = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$). Verificare che ${}^tA = A$ e che ${}^tA'C' = C'A'$.

Operatore aggiunto. Operatori hermitiani.

Lezione 23 - 10 gennaio 2008

Operatori ortogonali (unitari reali).

Teorema (dimostrato): le seguenti tre proposizioni sono equivalenti: (1) T è un operatore ortogonale, (2) T tramuta basi ortogonali in basi ortogonali, (3) T conserva la norma dei vettori.

Esercizio: un operatore T ortogonale è invertibile.

Matrici ortogonali.

Teorema (dimostrato): una matrice $n \times n$ è ortogonale se e solo se le sue colonne costituiscono una base ortogonale rispetto al prodotto scalare canonico in $\mathbf{R}^n$.

Esercizio svolto: trovare tutte le matrici ortogonali $A \in O(2)$. Interpretazione geometrica.

Operatori unitari. Matrici unitarie.

Indice di nullità.

Teorema (dimostrato): una forma bilineare è non degenere se e solo se l'indice di nullità è uguale a zero.

Teorema di Sylvester (dimostrato). Indice di positività.

Esercitazione 1 - 10 gennaio 2008

1) Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita, nella base $\{e_1, e_2, e_3\}$, da

$$\begin{cases} L(e_1) = -e_1 + e_2, \\ L(e_2) = e_1 - e_2, \\ L(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Determinare nucleo ed immagine di L.

2) Stabilire in dipendenza da $k \in \mathbf{R}$ se l'applicazione $O : \mathbf{R}^2 \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$, definita da

$$O \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & (k+1)b \\ ka & 0 \end{pmatrix}$$

è lineare e in caso affermativo determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di O. Si determini infine una base per ciascuno di essi.

3) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, la risolubilità e la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (5-\lambda)x - 2y - z = 1, \\ -2x + (2-\lambda)y - 2z = 2, \\ -x - 2y + (5-\lambda)z = 1. \end{cases}$$

Dove possibile, risolvere il sistema usando il metodo di Cramer.

4) Usando il teorema degli orlati, trovare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

.

5) Trovare indice di positività e di nullità della forma bilineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Lezione 24 - 16 gennaio 2008

Polinomi. Polinomi come spazi vettoriali. Prodotto di due polinomi.

Grado di un polinomio. Polinomi lineari. Grado del prodotto di due polinomi.

Radice di un polinomio.

Teorema: un polinomio con coefficienti complessi con grado maggiore di zero ha almeno una radice in campo complesso.

Teorema: un polinomio di grado n in campo complesso ha n radici in $\mathbf{C}$.

Molteplicità delle radici di un polinomio.

Polinomi di matrici. Esempi e proprietà.

Teorema (dimostrato): data A matrice $n \times n$ sul corpo K, esiste un polinomio non nullo f tale che $f(A) = 0$.

Autovalori ed autovettori di un operatore. Definizione.

Autovalori ed autovettori di una matrice $n \times n$. Definizione.

Esempio: trovare autovalori ed autovettori di una matrice diagonale.

Definizione di autospazio V_λ relativo all'autovalore λ.

Teorema (dimostrato): autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Teorema (dimostrato): λ è autovalore di un operatore A se e solo se $A - \lambda I$ non è invertibile.

Teorema (dimostrato): dato un operatore A in uno spazione vettoriale V su $\mathbf{C}$, con $\dim(V) \geq 1$, esiste un autovettore di A.

Matrice associata ad un operatore rispetto ad una base di autovettori.

Operatori (e matrici) diagonalizzabili.

Lezione 25 - 17 gennaio 2008

Esercizio (svolto): trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio (svolto): trovare autovalori ed autovettori della seguente matrice: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Esercizio: trovare autovalori ed autovettori della seguente matrice: $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Polinomio caratteristico: definizione ed esempi.

Teorema (dimostrato) λ è un autovalore di una matrice A se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico di A.

Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore.

Esercizio (svolto): trovare gli autovalori (con relative molteplicità algebriche e geometriche) della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Teorema (dimostrato): la molteplicità geometrica di un autovalore è minore od uguale alla sua molteplicità algebrica.

Teorema (dimostrato): date due matrici $n \times n$ A e B, con B invertibile, abbiamo $p_A(\lambda) = p_{B^{-1}AB}(\lambda)$.

Esercizio (svolto): dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a \neq 0$, è diagonalizzabile.

Esercizio: trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio: trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio: trovare gli autovalori di una matrice triangolare.

Esercitazione 2 - 17 gennaio 2008

1) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 e W lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4, cioé

$$V = \{v = a + bx + cx^2 + dx^3,\ a, b, c, d \in \mathbf{R}\},$$
$$W = \{v = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,\ a, b, c, d, e \in \mathbf{R}\}.$$

Si consideri l'applicazione $F : V \to W$ definita dalla

$$F(v) = x^2 \frac{dv}{dx}.$$

a) Dimostrare che F è lineare.
b) Trovare la matrice associata all'applicazione F rispetto alle basi $\mathcal{B}_V = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\mathcal{B}_W = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.
c) Trovare nucleo ed immagine di F.

2) Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni reali e continue nell'intervallo $[1,2]$. Si consideri il sottospazio W generato dalle funzioni dell'insieme

$$B = \left\{ f_1(x) = 1, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = \frac{1}{x+1}, f_4(x) = \frac{1}{x(x+1)} \right\}.$$

a) Determinare se le funzioni dell'insieme B sono linearmente indipendenti e trovare una base per W.
b) Si consideri la trasformazione $T : W \to W$ che associa ad ogni funzione $h \in W$ la funzione $g \in W$, definita come

$$g(x) = \frac{h(1)}{x+1} + h(2),$$

dove $h(1)$ ed $h(2)$ sono i valori assunti dalla funzione $h(x)$ nei punti $x = 1$ ed $x = 2$. Dire se la trasformazione T è lineare e in caso affermativo determinare la matrice associata alla trasformazione T nella base precedentemente scelta.
c) Detta A tale matrice, si risolvano i sistemi lineari $Ax = b$, nei due casi in cui b sia il vettore nullo oppure il vettore con tutte le componenti uguali ad uno.

3) Sia data l'applicazione $g : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, definita da

$$g(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tBPA), \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Dimostrare che tale applicazione è un prodotto scalare.
b) Dimostare che tale prodotto scalare è definito positivo.

Lezione 26 - 23 gennaio 2008

Teorema (dimostrato): un operatore $T : V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale V e per ogni autovalore la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica.

Ventaglio. Base a ventaglio. Matrice (triangolare superiore) associata ad un operatore relativamente ad una base a ventaglio.

Operatori triagolabili. Matrici triangolabili.

Teorema: dato un operatore A definito in uno spazio vettoriale complesso, esiste un ventaglio per A.

Teorema di Hamilton-Cayley (dimostrato).

Proprietà degli autovalori di un'applicazione unitaria.

Teorema (dimostrato): dato V spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ dotato di prodotto hermitiano definito positico e A applicazione unitaria da V in V, esiste una base ortonormale di V costituita da autovettori di A.

Lezione 27 - 24 gennaio 2008

Corollario (dimostrato): data A matrice unitaria $n \times n$, esiste una matrice unitaria $n \times n$ U tale che ${}^t\bar{U}AU$ sia una matrice unitaria diagonale.

Proprietà degli autovalori e degli autovettori di una matrice simmetrica.

Teorema spettrale, caso reale (dimostrato).

Corollario (dimostrato): data A matrice simmetrica reale $n \times n$, esiste una matrice unitaria reale $n \times n$ U tale che ${}^tUAU$ sia una matrice diagonale.

Esercizio (svolto): autovettori di un operatore simmetrico corrispondenti ad autovalori distinti sono mutuamente ortogonali.

Teorema spettrale, caso complesso.

Esercizio (svolto): data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, trovare una base spettrale di $\mathbf{R}^2$.

Esercizio (svolto): trovare una trasformazione di similitudine che diagonalizzi la matrice $\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercitazione 3 - 24 gennaio 2008

1) Calcolare indice di positività e di nullità della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$.

2) a) Calcolare autovalori ed autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) La matrice è diagonalizzabile?
c) Trovare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare $A^2X = -4X$, con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$.

3) a) Determinare, al variare di $h \in \mathbf{R}$, il rango e gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & h \end{pmatrix}.$$

b) Dire se, al variare di h, la matrice è diagonalizzabile.