CORSO ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - MOD. A / ALGEBRA LINEARE CON ESERCITAZIONI (2010/11)

Modalità d'esame

Gli appelli d'esame saranno tenuti durante i periodi di sospensione della didattica (febbraio, metà giugno – fine luglio, settembre).

L'esame consisterà di una prova scritta ed una prova orale, entrambe obbligatorie.

La prova scritta consisterà nella soluzione di esercizi sugli argomenti svolti a lezione. Non è ammesso l'uso di libri di testo, eserciziari od appunti. L'esito della prova scritta concorre alla valutazione finale. Nel caso di prova scritta insufficiente, si consiglia la ripetizione della medesima prima di sostenere la prova orale.

Per la prova orale è richiesto allo studente di dimostrare la comprensione e la padronanza degli argomenti trattati durante il corso. Viene inoltre richiesta la preparazione delle dimostrazioni della lista di teoremi sotto riportata. Per i rimanenti teoremi è comunque richiesta la conoscenza degli enunciati e la comprensione dei contenuti.

La prova scritta, se sufficiente, rimane valida per tutti gli appelli dell'anno di corso.

Lista dei teoremi di cui viene richiesta all'esame la conoscenza delle dimostrazioni

1) Teorema di Grassmann.

2) Data $F : V \to W$ applicazione lineare, $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F))$.

3) Teorema di Binet.

4) Gram-Schmidt.

5) Dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee.

6) Teorema di Sylvester.

7) Teorema spettrale.

Testi consigliati

1) Serge Lang, *Algebra lineare* Boringhieri.

2) Marco Abate, *Algebra lineare*, McGraw-Hill.

Lezione 1 - 19 ottobre 2010

Terminologia: insieme, sottoinsieme, intersezione ed unione di insiemi.

Vettori in $\mathbb{R}^n$. Punto in un n-spazio.

Addizione di punti (vettori) e moltiplicazione per una costante. Proprietà associativa, commutativa e distributiva dell'addizione di vettori. Il vettore nullo in $\mathbb{R}^n$. Interpretazione geometrica dell'addizione di vettori (regola del parallelogramma).

Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$: definizione e dimostrazione delle sue proprietà.

Esercizio: $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$, $(A-B)^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2$.

Dimostrazione disuguaglianza di Schwarz.

Norma di un vettore.

Lezione 2 - 19 ottobre 2010

Dimostrazione disuguaglianza triangolare.

Vettori unità.

Distanza fra due vettori: definizione e interpretazione geometrica.

Perpendicolarità: definizione e interpretazione geometrica.

Proiezione di un vettore su di un altro: definizione e interpretazione geometrica.

Angolo fra due vettori: definizione e interpretazione geometrica.

Esercizio: dimostrare che, se due vettori non nulli A e B hanno stessa direzione e verso, allora il coseno dell'angolo θ fra essi compreso vale $+1$. Dimostrare che, se invece i due vettori hanno stessa direzione ma verso opposto, allora $\cos\theta = -1$.

Equazione parametrica retta per un punto ed avente la direzione di un vettore. Esempi in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$.

Iperpiano in $\mathbb{R}^n$: definizione ed esempi.

Equazione parametrica di un piano in $\mathbb{R}^3$; vettori di giacitura del piano.

Esercizio svolto: scrivere l'equazione parametrica del piano passante per il punto $P = (1, 2, 3)$ e avente come vettori di giacitura $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$.

Vettori paralleli, rette parallele e piani paralleli. Piani perpendicolari ed angolo fra due piani.

Esercizio: trovare il coseno dell'angolo tra i due piani $2x - y + z = 0$ e

$x + 2y - z = 1$.

Lezione 3 - 20 ottobre 2010

Definizione di corpo. Esempi: corpo dei numeri complessi, dei numeri reali e dei numeri razionali. I numeri interi non costituiscono un corpo.

Esercizio: dimostrare che $K = \{x \in \mathbb{C}, x = a + ib, a, b \in \mathbb{Q}\}$ è un corpo.

Esercizio svolto: il vettore nullo è univocamente determinato.

Esercizio: dimostrare che $V = K^n$ su K è uno spazio vettoriale.

Definizione di spazio vettoriale delle funzioni $f : S \to K$, con S insieme e K corpo. Definizione di $f + g$ e cf, con $f, g \in V$ e $c \in K$.

Definizione di sottospazio vettoriale.

Esercizio svolto: una retta non passante per l'origine non è un sottospazio vettoriale in $\mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}$.

Esercizio svolto: $W = \{\lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale in $\mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}$.

Esercizio svolto: se W_1 e W_2 sono sottospazi di V, anche l'intersezione di W_1 e W_2 è un sottospazio di V.

Esercizio svolto: dimostrare che, se $V = \mathbb{R}^n$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $W = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } X = (x_1, ..., x_{n-1}, 0)\}$, allora W è un sottospazio di V. Visualizzazione geometrica casi particolari $n = 2$ e $n = 3$.

Definizione di combinazione lineare di vettori.

Esercizio svolto: se $v_1, ..., v_n \in V$, l'insieme $\mathrm{Span}(v_1, ..., v_n)$ delle combinazioni lineari di tali vettori costituisce un sottospazio di V.

Esercizio svolto: siano $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (3, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$; dare un'interpretazione geometrica di $\mathrm{Span}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$.

Esercizio svolto: siano $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$; dimostrare che $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$.

Esercizio svolto: siano $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (3, 1, 0)$, $v_2 = (-1, -1, 0)$, $v_3 = (2, 0, 0)$; dimostrare che $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ e dare un'interpretazione geometrica di tale risultato.

Lezione 4 - 21 ottobre 2010

Definizione di indipendenza e dipendenza lineare di vettori.

Esercizio svolto: in $V = \mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}$ i vettori $e_1 = (0, 1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$,..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che se due dei vettori $v_1, ..., v_n$ sono uguali allora i vettori $v_1, ..., v_n$ sono linearmente dipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che due vettori v_1 e v_2 sono indipendenti se e solo se uno di loro è multiplo dell'altro, cioé $v_1 = kv_2$, con $k \in K$. Interpretazione geometrica in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio svolto: dimostrare che un insieme di vettori $\{v_1, ..., v_n\}$ che comprende un sottoinsieme di vettori $\{v_1, ..., v_k\}$ (con $1 \leq k \leq n$) linearmente dipendenti è esso stesso dipendente. Dimostrare quindi che qualsiasi sottoinsieme di un sistema indipendente di vettori è indipendente.

Esercizio svolto: se uno dei vettori $v_1, ..., v_n$ è il vettore nullo, allora tali vettori sono linearmente dipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che nello spazio $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ le funzioni $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ e $f_3(t) = 2 + 2t$ sono linearmente dipendenti.

Esercizio svolto: dimostrare che nello spazio $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ le funzioni $f_1(t) = 1$ e $f_2(t) = t$ sono linearmente indipendenti.

Definizione di base di V.

Definizione di coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto ad una base $\{v_1, ..., v_n\}$.

Esercizio svolto: dimostrare che, se $v_1, ..., v_n$ linearmente indipendenti e $\sum_i x_i v_i = \sum_i y_i v_i$, allora $x_i = y_i$ per tutti gli $i \in [1, n]$.

Isomorfismo tra gli spazi vettoriali V sul corpo K, avente una base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$, e K^n.

Lezione 5 - 21 ottobre 2010

Esercizio svolto: dimostrare che $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-3, 2)$ costituiscono una base per $V = \mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}$.

Esercizio svolto: dato lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}$, trovare le coordinate di $v = (1, 0)$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (-3, 2)\}$ e alla base canonica $\mathcal{B}' = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$.

Esercizio: dato lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$, dimostrare che $v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$ sono vettori linearmente indipendenti.

Esercizio: dimostrare che $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -1)$ costituiscono una base per $V = \mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$ e trovare le coordinate di $v = (0, 0, 1)$ rispetto a tale base.

Esercizio: dimostrare che $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -1)$ costituiscono una base per $V = \mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$ e trovare le coordinate di $v = (0, 0, 1)$ rispetto a tale base.

Definizione di sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti.

Esercizio svolto: dati i vettori $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (2, 3)$, $v_4 = (1, -1)$, dimostrare che $\{v_1, v_2\}$ è un sottoinsieme massimale.

Teorema (dimostrato): se $\{v_1, ..., v_n\}$ generano V e $\{v_1, ..., v_r\}$ sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti, allora $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_r\}$ è una base per V.

Teorema (dimostrato): due basi di uno spazio vettoriale hanno il medesimo numero di elementi.

Esercizio svolto: dimostrare che i vettori $e_1 = (0, 1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$ costituiscono una base per $V = K^n$ su K, da cui $\dim(K^n) = n$.

Lezione 6 - 28 ottobre 2010

Esempio di spazio vettoriale: i polinomi $P(t)$ di grado $\leq n$, con $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio svolto: dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_0 = 1, v_1 = t, ..., v_n = t^n\}$ è una base per lo spazio vettoriale dei polinomi $P(t)$ di grado $\leq n$. Quindi tale spazio vettoriale ha dimensione $n + 1$.

Esercizio svolto: dimostrare che lo spazio vettoriale di tutti i polinomi $P(t)$ (di grado qualsiasi) non ha dimensione finita.

di uno spazio vettoriale V.

Teorema (dimostrato): un insieme massimale di elementi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V è una base di V.

Esercizio: dimostrare che se W sottospazio di V e $\dim(W) = \dim(V)$, allora $W = V$.

Esercizio svolto: Dati in $V = \mathbb{R}^4$ i vettori $w_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $w_2 = (1, 2, 3, 4)$, provare che sono linearmente indipendenti e quindi completare la base per V.

Definizione di somma di due sottospazi.

Esercizio svolto: la somma $U + W$ di due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V è un sottospazio di V.

Esempio: in $\mathbb{R}^3$, considerare U asse x e V asse y.

Esercizio svolto: in generale l'unione di due sottospazi non è un sottospazio.

Definizione di somma diretta di due sottospazi.

Teorema (dimostrato): se U, W sottospazi di V, $V = U+W$ e l'intersezione di U e W comprende il solo vettore nullo, allora $V = U \oplus W$.

Lezione 7 - 2 novembre 2010

Teorema (dimostrato): se W sottospazio di V, allora esiste U sottospazio di V tale che $V = U \oplus W$. Tale sottospazio U non è univocamente determinato. Esempio: $V = \mathbb{R}^2$, W sottospazio generato da $v_1 = (2, 1)$. Definendo

U come il sottospazio generato da $v_2 = (0, 1)$, abbiamo $V = W \oplus U$. D'altra parte, definendo U' come il sottospazio generato da $v'_2 = (1, 1)$ abbiamo anche $V = W \oplus U'$. Interpretazione geometrica del risultato.

Teorema Grassmann (preparazione dimostrazione richiesta per l'esame orale): dati U e W sottospazi di V, $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Esempio geometrico: $V = \mathbb{R}^3$ ($\dim(V) = 3$), $U = \{(a, b, 0),\ a, b \in \mathbb{R}\}$ (piano xy), $W = \{(0, c, d),\ c, d \in \mathbb{R}\}$ (piano yz). Verificato che $\dim(U) = \dim(W) = 2$, $U + W = V$, $U \cap W = \{(0, k, 0),\ k \in \mathbb{R}\}$ (asse y, $\dim(U \cap W) = 1$).

Definizione di matrice $m \times n$ sul corpo K. Vettori riga e vettori colonna. Esempi numerici.

Addizione di matrici, moltiplicazione di una matrice per uno scalare.

Matrice zero.

Le matrici $m \times n$ con elementi di matrice in K costituiscono uno spazio vettoriale su K, chiamato $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Lezione 8 - 2 novembre 2010

Esercizio svolto: Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ sono sottospazi e in caso di risposta affermativa trovarne una base:

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 1\},$$

$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 1\},$$

$$W_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - x_2 + x_4 = 0\},$$

$$W_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\}.$$

Esercizio svolto: Sia $\mathbb{R}_3[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a tre. Si consideri il sottoinsieme U definito nel modo seguente:

$$U = \{p \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(1) = p(-1) = 0\}.$$

a) Dimostrare che U è un sottospazio di $\mathbb{R}_3[t]$.
b) Determinare una base di U.
c) Determinare una base di $U + W$ e una base di $U \cap W$, dove W è il sottospazio

$$W = \{p \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(0) = 0\}.$$

Esercizio svolto: Dati $U = \text{Span}(v_1 = (1,0,1))$, $W = \text{Span}(v_2 = (2,1,1), v_3 = (0,1,0))$, provare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Esercizio svolto: In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U = \text{Span}((1,1,0,1),(1,1,0,2)),$$

$$W = \text{Span}((1,1,0,0),(1,2,0,0),(1,3,0,0)).$$

Trovare le dimensioni di U, W, $U + W$ e $U \cap W$.

Esercizio: Si considerino i polinomi $p_1(t) = t^2 + 2$, $p_2(t) = 3t + 4$ e $p_3(t) = -t^2 + 6t + 6$ e sia W il sottospazio di $\mathbb{R}_2[t]$ generato da p_1, p_2 e p_3.
a) Si determini la dimensione e una base di W.
b) Si stabilisca per quali valori di k il polinomio $f_k(t) = (k+1)t^2 + 3kt + 8$ appartiene a W.

Lezione 9 - 3 novembre 2010

Esercizio svolto: trovare una base dello spazio $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Esempio: le matrici

$$\left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

costituiscono una base per $\mathcal{M}_{2,2}(K)$.

Definizioni ed esempi: matrice quadrata, matrice trasposta, matrice diagonale, matrice identità, matrice simmetrica, matrice antisimmetrica, matrice hermitiana, matrice triangolare superiore ed inferiore.

Esercizio: dimostrare che, per ogni $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$, ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

Esercizio: dimostrare che, per ogni $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ e per ogni $c \in K$, ${}^t(cA) = c\,{}^tA$.

Esercizio svolto: trovare una base per il sottospazio delle matrici $n \times n$ triangolari superiori.

Esercizio svolto: dimostrare che le matrici $n \times n$ simmetriche costituiscono un sottospazio di $\mathcal{M}_{n,n}$.

Esercizio: dimostrare che le matrici $n \times n$ antisimmetriche costituiscono un sottospazio di $\mathcal{M}_{n,n}$.

Esercizio svolto: trovare una base per lo spazio delle matrici $n \times n$ simmetriche. Esempio: $n = 2$.

Esercizio svolto: trovare una base per lo spazio delle matrici $n \times n$ antisimmetriche. Esempio: $n = 2$.

Esercizio svolto: sia $V = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, U il sottospazio delle matrici reali $n \times n$ simmetriche e W il sottospazio delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche. Provare che $V = U \oplus W$.

Esercizio svolto: sia $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, $U = \{A \in V, a_{21} = a_{22} = 0\}$, $W = \{A \in V, a_{12} = a_{22} = 0\}$. Trovare una base per i sottospazio $U + W$ e $U \cap W$. Verificare che $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Definizioni: sistema di equazioni lineari, sistema omogeneo e non omogeneo, soluzioni banali e non banali.

Teorema (dimostrato): sia dato un sistema omogeneo di m equazioni lineari in n incognite, con $n > m$, e i cui coefficienti siano elementi di un corpo K. Allora il sistema possiede soluzioni non banali in K.

Lezione 10 - 4 novembre 2010

Esercizio svolto: sia dato un sistema omogeneo di n equazioni lineari in n incognite e siano le colonne $A^1, ..., A^n$ linearmente indipendenti. Allora il sistema ammette solo la soluzione banale.

Esercizio svolto: l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo di equazioni lineari sul corpo K è uno spazio vettoriale su K.

Teorema (dimostrato): sia dato un sistema di n equazioni lineari in n incognite e siano i vettori $A^1, ..., A^n$ linearmente indipendenti. Allora il sistema possiede un'unica soluzione in K.

Definizione di prodotto di matrici. Esempi.

Esempio numerico di matrici A, B tali che A e B non commutano, cioé $AB \neq BA$.

Proprietà del prodotto di matrici : $A(B + C) = AB + AC$, $A(xB) = x(AB)$, $A(BC) = (AB)C$, con A, B, C matrici e x scalare.

Esercizio svolto: dimostrare che ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

Esercizio svolto: dimostrare che ${}^t(ABC) = {}^tC{}^tB{}^tA$. Generalizzazione: ${}^t(A_1 \cdots A_k) = {}^tA_k \cdots {}^tA_1$.

Definizione di matrice inversa. Dimostrato che la matrice inversa, se esiste, è univocamente determinata.

Lezione 11 - 9 novembre 2010

Definizioni: applicazione, funzione, immagine di un'applicazione.

Esempio di applicazione: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$.

Esempio di applicazione: $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \sqrt{x}$.

Esempio di applicazione: $F : S \to K^n$, con $F(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$. Esempio di rappresentazione parametrica di una retta nel 2-spazio: $F(t) =$

$(t, 2t+5)$.

Definizione di applicazione composta $G \circ F$.

Esempio di applicazione composta: $G \circ F$ e $F \circ G$, con $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $F(t) = (t, t^2)$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G(x, y) = xy$.

Definizione di applicazione lineare.

Esempio di applicazione lineare: siano dati V spazio vettoriale su K, una base $\{v_1, ..., v_n\}$ di V e l'applicazione $F : V \to K^n$ definita, per ogni $v \in V$, $v = x_1 v_1 + \cdots x_n v_n$, da $F(v) = (x_1, ..., x_n)$. Provato che F è lineare.

Esercizio svolto: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definito da $F(x, y, z) = (x, y, 0)$ è lineare. Si tratta della proiezione sul piano (x, y). Definizione generale di operatore di proiezione.

Esercizio svolto: dati $A \in \mathbb{R}^3$ e l'applicazione $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $L_A(X) = X \cdot A$ per ogni $X \in \mathbb{R}^3$, provare che L_A è lineare.

Esercizio svolto: siano date la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ e l'applicazione $L_A : K^n \to K^m$ definita da $L_A(X) = AX$ per ogni $X \in K_n$ vettore colonna. Dimostrare che L_A è lineare.

Esercizio svolto: dimostrare che l'applicazione identica e l'applicazione nulla sono lineari.

Esercizio (in parte svolto a lezione): dato l'insieme $\mathcal{L}(V, V')$ delle applicazioni lineari da V in V', con V, V' spazi vettoriali su K e prese due qualsiasi applicazioni lineari $F, G \in \mathcal{L}(V, V')$ e un qualsiasi scalare $c \in K$, dimostrare che $F + G$, definito da $(F + G)(u) = F(u) + G(u)$ per ogni $u \in V$ e cF, definito da $(cF)(u) = cF(u)$ per ogni $u \in V$, sono applicazioni lineari. Verificare quindi che $\mathcal{L}(V, V')$ è uno spazio vettoriale.

Teorema (dimostrato): un'applicazione lineare è univocamente determinata dai suoi valori sugli elementi di una base.

Lezione 12 - 9 novembre 2010

Esercizio svolto: Dato l'insieme

$$U = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid AM = 0 \right\}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix},$$

verificare se U è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ e nel caso trovare una base di U.

Esercizio svolto: Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori di k le matrici A_k, A_k^2, e A_k^3 sono linearmente indipendenti.

Definizione di traccia di una matrice $n \times n$.

Esercizio svolto: dimostrare che, se A e B sono matrici $n \times n$, allora $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Esercizio svolto: Sia A una matrice $n \times n$ invertibile. Dimostrare che ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

Definizione di commutatore di due matrici.

Esercizio svolto: si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 sul corpo reale. Dimostrare che, se $B \in V$ e $i[A, B] = AB - BA = 0$ per ogni $A \in V$, allora B è multipla dell'identità.

Esercizio svolto: data la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dimostrare che A ammette inversa se e solo se $ad - bc \neq 0$.

Lezione 13 - 10 novembre 2010

Definizione di nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.

Dimostrato che, data $F : V \to W$ applicazione lineare, $\mathrm{Im}(F)$ è un sottospazio di W, mentre $\mathrm{Ker}(F)$ è un sottospazio di V.

Teorema (dimostrato): un'applicazione lineare il cui nucleo comprenda solo il vettore nullo trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.

Esercizio svolto: un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il cui nucleo comprenda solo il vettore nullo trasforma un piano in $\mathbb{R}^3$ in un piano in $\mathbb{R}^3$.

Teorema (dimostrato): se $T : V \to W$ applicazione lineare e $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ base di V, allora $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}(T(v_1), ..., T(v_n))$. Osservazione: $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ non è in generale base di $\mathrm{Im}(T)$. Esempio: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y) = (x + y, x + y)$.

Teorema (dimostrato): data $F : V \to W$ applicazione lineare, $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F))$.

Lezione 14 - 11 novembre 2010

Definizione di applicazione iniettiva, suriettiva e biiettiva. Un'applicazione lineare F è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$.

Esercizio svolto: dire se l'allplicazione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, con $F(x) = (x, 0)$ è lineare, iniettiva, suriettiva. Trovare una base per il nucleo e per l'immagine di F.

Esercizio svolto: dire se l'allplicazione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $F(x,y) = (x)$ è lineare, iniettiva, suriettiva. Trovare una base per il nucleo e per l'immagine di F.

Esercizio svolto: dire se l' applicazione $f(x) = x^2$ è lineare, iniettiva, suriettiva.

Esercizio: dire se l'allplicazione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $F(x,y,z) = (x,y,0)$ è lineare, iniettiva, suriettiva. Trovare una base per il nucleo e per l'immagine di F.

Esercizio: dire se l' applicazione $f(x) = x^3$ è lineare, iniettiva, suriettiva.

Applicazioni invertibili. Unicità dell'applicazione inversa.

Teorema (dimostrato): un'applicazione lineare iniettiva e suriettiva è invertibile e l'inversa è essa stessa un'applicazione lineare.

Definizione di isomorfismo.

Osservazione: se $F : V \to V'$ è un isomorfismo di spazi vettoriali, allora $\dim(V) = \dim(V') = n$.

Composizione di applicazioni lineari.

Esempio in cui $F \circ G \neq G \circ F$: $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $F(x,y,z) = (x,y,0)$ e $G(x,y,z) = (x,z,0)$.

Definizione di operatore (o endomorfismo).

Esercizio svolto: dimostrare che $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definita da $T(x,y) = (y, 2x - y)$ è invertibile e trovare T^{-1}.

Esercizio: data $F \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definita da $F(X) = X + A$, con $A = (0,-1,0)$, dimostrare che F non è lineare. In generale le traslazioni non sono applicazioni lineari.

Esercizio: dimostrare che $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $F(x,y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$ non è lineare. Viene infatti soddisfatta la proprietà di omogeneità ma non quella di additività.

Esercizio: dire se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $F(x,y) = xy$, è lineare.

Esercizio: dimostrare che $T : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, definita da $T(A) = {}^tA$, è un isomorfismo e trovare T^{-1}.

Esercizio: siano V, W spazi vettoriali su K, con $\dim(V) < \dim(W)$. Dimostrare che (a) non esiste nessuna applicazione lineare $F : V \to W$ suriettiva e (b) non esiste nessuna applicazione lineare $G : W \to V$ iniettiva.

Lezione 15 - 16 novembre 2010

Applicazione lineare associata ad una matrice.

Teorema (dimostrato): se due matrici danno luogo alla stessa applicazione lineare, esse coincidono.

Matrice associata ad un'applicazione lineare.

Esercizio svolto: trovare la matrice associata all'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, con $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$.

Esercizio svolto: siano $V = \mathbb{R}_2[t]$ e $W = \mathbb{R}_3[t]$ gli spazi vettoriali dei polinomi di una variabile reale di grado minore uguale a 2 (per V) e a 3 (per W), $T : V \to W$ l'applicazione lineare definita da $[T(p)](t) = tp(t+1)$ per ogni $p \in V$ e $\mathcal{B} = \{p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2\}$, $\mathcal{B}' = \{q_0(t) = 1, q_1(t) = t, q_2(t) = t^2, q_3(t) = t^3\}$ basi per V e per W. Trovare la matrice associata a T rispetto a queste basi.

Esercizio: sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da $T(x, y, z) = (2x + 2z, x - y)$. Trovare la matrice associata a tale applicazione lineare rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \{w_1 = (1, 0), w_2 = (0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ e rispetto alle basi $\mathcal{C} = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{C}' = \{q_1 = (1, 0), q_2 = (1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio svolto: trovare la matrice associata ad una rotazione antioraria di angolo θ dei vettori in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio svolto: trovare la matrice associata all' applicazione identica in $\mathbb{R}^2$ quando i vettori di base vengono ruotati in verso antiorario di un angolo θ.

Lezione 16 - 16 novembre 2010

Esercizio svolto: dato $\mathbb{R}_2[t]$ spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a due, dire se l'applicazione T, definita da $[T(p)](t) = p(t+1)$ per ogni $p \in \mathbb{R}_2$ è lineare.

Esercizio svolto: data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si consideri l'applicazione $T : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, definita, per ogni $X \in \mathcal{M}_{2,2}$, da $T(X) = AX - XA$.

a) Dimostrare che T è lineare.

b) Determinare $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio svolto: sia V lo spazio vettoriale delle funzioni reali e continue nell'intervallo $[1, 2]$. Si consideri il sottospazio W generato dalle funzioni dell'insieme

$$B = \left\{ f_1(x) = 1, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = \frac{1}{x+1}, f_4(x) = \frac{1}{x(x+1)} \right\}.$$

a) Determinare se le funzioni dell'insieme B sono linearmente indipendenti e trovare una base per W.
b) Si consideri la trasformazione $T : W \to W$ che associa ad ogni funzione $h \in W$ la funzione $g \in W$, definita come

$$g(x) = \frac{h(1)}{x+1} + h(2),$$

dove $h(1)$ ed $h(2)$ sono i valori assunti dalla funzione $h(x)$ nei punti $x = 1$ ed $x = 2$. Dire se la trasformazione T è lineare e in caso affermativo determinare la matrice associata alla trasformazione T nella base precedentemente scelta.

Esercizio svolto: sia data in $\mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$\begin{cases} L(e_1) = ie_2 + e_3, \\ L(e_2) = -ie_1 + 2e_2, \\ L(e_3) = e_1 + 2e_3, \end{cases}$$

dove $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è una base di $\mathbb{C}^3$.
a) Scrivere la matrice M associata ad L rispetto alla base $\mathcal{B}$.
b) Trovare una base per il nucleo e una base per l'immagine di L.

Esercizio svolto: data l'applicazione lineare $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, definita da

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

determinare nucleo ed immagine di A.

Lezione 17 - 17 novembre 2010

Esercizio svolto: provare che le rotazioni in $\mathbb{R}^2$ conservano le distanze.

Matrice associata alla composizione di applicazioni lineari.

Matrice associata ad un cambiamento di base.

Esercizio svolto: dato $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1 = (3, 1), e_2 = (-1, -1)\}$ basi di V, trovare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e quella del cambiamento di base da da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Esercizio: dato $V = \mathbb{R}_2[t]$ spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a due, $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ e $\mathcal{B}' = \{1, t-1, 2t^2-4t-6\}$ basi di V, trovare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e quella del cambiamento di base da da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Esercizio: dimostrare che $R_\theta R_{\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$ e che $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$, dove R_θ indica la rotazione antioraria di angolo θ dei vettori in $\mathbb{R}^2$.

Relazione tra matrici associate alla stessa applicazione lineare relativamente a basi differenti.

Determinanti di matrici 2×2. Definizione e proprietà.

Determinanti di matrici $n \times n$. Proprietà.

Esercizio svolto: sia $c \in K$ e $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$; dimostrare che $\det(cA) = c^n \det(A)$.

Lezione 18 - 18 novembre 2010

Dimostrazione regola di Cramer per la risoluzione di sistemi di equazioni lineari.

Teorema (dimostrato): dati n vettori colonna $A^1, ..., A^n \in K^n$ linearmente indipendenti, allora $\det(A^1, ..., A^n) = 0$.

Corollario: dati n vettori colonna $A^1, ..., A^n \in K^n$ tali che $\det(A^1, ..., A^n) = 0$ e un vettore colonna $B \in K^n$, allora esistono e sono univocamente determinati n scalari $x_1, ..., x_n$ tali che $x_1 A^1 + \cdots x_n A^n = B$.

Sviluppo di Laplace per il calcolo del determinante di una matrice $n \times n$.

Esempi numerici, con riferimento alla soluzione di sistemi lineari (regola di Cramer).

Proprietà delle permutazioni.

Lezione 19 - 23 novembre 2010

Unicità del determinante e sua espressione esplicita. Caso particolare: matrici 2×2.

Proprietà del determinante: $\det(A) = \det({}^tA)$ (non dimostrata)

Teorema di Binet (dimostrato): $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (corollario: se esiste l'inversa A^{-1} di una matrice A, allora $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$).

Determinante di un'applicazione lineare $F : V \to V$.

Esercizio svolto: calcolare il determinante dell'applicazione lineare $F : R^3 \to R^3$, con $F(x, y, z) = (2x - 4y + z, x - 2y + 3z, 5x + y - z)$.

Teorema (dimostrato): se $\det(A) \neq 0$, la matrice A è invertibile. Formula esplicita per il calcolo di A^{-1}.

Lezione 20 - 23 novembre 2010

Esercizio svolto: trovare l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio svolto: dimostrare che $R_\theta R_{\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$ e che $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$, dove R_θ indica la rotazione antioraria di angolo θ dei vettori in $\mathbb{R}^2$. oEsercizio svolto: si considerino lo spazio $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 su $\mathbb{R}$ e la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Sia $T : \mathcal{M}_{2,2} \to \mathcal{M}_{2,2}$ l'applicazione definita, per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}$ da $T(A) = MA$.
a) Dimostrare che T è lineare.
b) Trovare il determinante di T.
c) Dire se T è invertibile.

Esercizio svolto: nello spazio vettoriale V dei polinomi $p(t)$ di grado non superiore al terzo a coefficienti reali, si consideri l'applicazione f che ad ogni polinomio $p(t)$ associa $p(t+1)$. Stabilire se f è lineare e se f è invertibile. Nel caso in cui sia lineare, determinare la matrice associata ad f.

Esercizio svolto: calcolare il determinante della matrice $n \times n$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n-3 & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & ... & n-2 & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & ... & n-1 & n & n & n \\ . & . & ... & . & . & . & . \\ . & . & ... & . & . & . & . \\ . & . & ... & . & . & . & . \\ n-1 & n & ... & n & n & n & n \\ n & n & ... & n & n & n & n \end{pmatrix}.$$

Esercizio svolto: determinare una base per il nucleo e per l'immagine dell'applicazione lineare $L : \mathbb{R}_2[t] \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, definita da

$$L(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + 2b - 2c & 2a + 2b \\ -a + b - 4c & 3a + 2b + 2c \end{pmatrix}.$$

Lezione 21 - 24 novembre 2010

Definizione di prodotto scalare. Prodotti scalari non degeneri. Prodotti scalari definiti positivi.

Esempio: prodotto scalare ordinario in K^n.

Esercizio svolto: dato $V = \mathbb{R}^3$, dimostrare che $\langle v, w \rangle = v_1w_1 + v_1w_2 + v_2w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$ ($v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3)$ in V) è un prodotto scalare. È definito positivo?. È non degenere?

Esercizio svolto: dato $V = \mathbb{R}_2[t]$ spazio vettoriale dei polinomi di grado monire od uguale a due, dimostrare che $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) +$

$p(-1)q(-1)$ (p, q in V) è un prodotto scalare. È definito positivo? È non degenere?

Vettori ortogonali. Complemento ortogonale.

Esercizio svolto: il complemento ortogonale di un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V è un sottospazio di V.

Esercizio: dimostrare che, se $w \perp S$, con S sottoinsieme di V, allora $w \perp U$, con U sottospazio generato da S.

Esercizio svolto: le soluzioni di un sistema di m equazioni lineari omogenee in n incognite costituiscono un sottospazio vettoriale di K^n.

Lezione 22 - 25 novembre 2010

Basi ortogonali.

Coefficienti di Fourier, proiezioni.

Esercizio svolto: trovare i coefficienti di Fourier di un vettore $v \in V$ rispetto ai vettori v_i ($i = 1, ..., n$) di una base ortogonale in V.

Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (dimostrato).

Norma di un vettore. Basi ortonormali.

Esercizio svolto: trovare una base ortonormale per lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -2, 0, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -1, 2)$ (si consideri l'ordinario prodotto scalare in $\mathbb{R}^4$).

Esercizio svolto: dati uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ ($\dim(V) = n$) e una base ortonormale per V, calcolare il prodotto scalare $\langle v, w \rangle$, con v, w generici vettori in V. Quale è la relazione con il prodotto scalare ordinario in $\mathbb{R}^n$?

Prodotti hermitiani. Esempio: dati $X = (x_1, ..., x_n)$, $Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$, $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$.

Lezione 23 - 30 novembre 2010

Teorema (dimostrato): dati uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ dotato di prodotto scalare definito positivo (o uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ dotato di prodotto hermitiano definito positivo) e un sottospazio W di V, provare che $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$ e che $V = W \oplus W^\perp$.

Esempio: $V = \mathbb{R}^3$, W generato da $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$. Risulta che $\dim(W^\perp) = 1$ e che una base per $W^\perp$ è costituita dal vettore $v_3 = (0, 0, 1)$. Interpretazione geometrica.

Prodotti scalari non definiti positivi.

Teorema (non dimostrato): dato W sottospazio di V, con $\dim(V) = n$, e dato un prodotto scalare non degenere in V, $\dim(W) + \dim(W^\perp) = n$.

Esempio: $V = \mathbb{R}^4$, $\langle v_1, v_2\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2t_1t_2$, con $v_1 = (x_1, y_1, z_1, ct_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2, ct_2)$ vettori in $\mathbb{R}^4$. Dimostrato che, dato questo prodotto scalare e il sottospazio $W = \{cw,\ w = (1, 0, 0, 1),\ c \in \mathbb{R}\}$, è $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$ ma $V \neq W \oplus W^\perp$.

Metodo di ortogonalizzazione per prodotti scalari non definiti positivi (teorema dimostrato).

Caratteristica (rango) per righe e per colonne di una matrice.

Dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee (teorema dimostrato).

Lezione 24 - 30 novembre 2010

Esercizio svolto: trovare una base ortonormale per lo spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, i, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ (si consideri l'ordinario prodotto hermitiano in $\mathbb{C}^3$).

Esercizio svolto: dato lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ sul corpo $\mathbb{R}$, dimostrare che $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB)$ è un prodotto scalare. È definito positivo? È non degenere? Trovare il complemento ortogonale del sottospazio delle matrici $n \times n$ diagonali.

Esercizio svolto: sia $V = \mathbb{R}^2$ e si definisca

$$\langle X, X'\rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle = xx' + 2yy' + xy' + yx'$$

per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^2$.
a) Dimostrare che effettivamente si tratta di un prodotto scalare.
b) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.
c) Determinare una base di V ortonormale rispetto a questo prodotto scalare.

Esercizio svolto: sia $\mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a due.
a) Dimostrare che la forma bilineare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$, definita da

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

è un prodotto scalare.
b) Trovare una base di $\mathbb{R}_2[t]$ ortogonale rispetto a tale prodotto scalare.

Esercizio svolto: sia data l'applicazione $g : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definita da

$$g(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tBA),$$

a) Dimostrare che tale applicazione è un prodotto scalare.
b) Trovare il complemento ortogonale, rispetto a g, del sottospazio

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}.$$

Lezione 25 - 1 dicembre 2010

Sistema di equazioni lineari non omogenee: dimensione dell'insieme delle soluzioni.

Esercizio svolto: determinare la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Teorema di Rouché-Capelli (dimostrato).

Sistemi (lineari) triangolari superiori.

Teorema (dimostrato): un sistema (lineare) triangolare superiore $Ax = b$ ammette una sola soluzione se e solo se tutti i termini diagonali della matrice A dei coefficienti sono non nulli.

Metodo di risoluzione all'indietro.

Esercizio svolto: si studino le soluzioni (qualora esistano) del sistema

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 3, \\ -y + 2z = 0, \\ 4z = -4. \end{cases}$$

Esercizio svolto: si studino le soluzioni (qualora esistano) del sistema

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 8, \\ 3z = 6, \\ 2z = -2. \end{cases}$$

Esercizio svolto: si studino le soluzioni (qualora esistano) del sistema

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 8, \\ 3z = -3, \\ 2z = -2. \end{cases}$$

Sistemi lineari equivalenti ed operazioni elementari.

Lezione 26 - 2 dicembre 2010

Metodo di eliminazione di Gauss. Pivot del metodo di Gauss.

Esercizio svolto: usando il metodo di Gauss si risolva il sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z - w = 1, \\ 3x + 9y + 4z + w = 1, \\ 2x + y + 5z + 2w = 0, \\ y - z - w = 2. \end{cases}$$

Sistemi a scala. Proprietà delle matrici a scala. Pivot di una matrice a scala.

Esercizio svolto: si risolva il sistema (a scala)

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + \frac{1}{2}x_6 = 1, \\ 2x_4 - x_6 = 0, \\ x_5 + 4x_6 = 1. \end{cases}$$

Riduzione a scala di un generico sistema di equazioni lineari.

Esercizio svolto: si risolva mediante riduzione a scala il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2, \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -7. \end{cases}$$

Esercizio svolto: discutere mediante riduzione a scala la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2, \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 7. \end{cases}$$

Lezione 27 - 7 dicembre 2010

Applicazioni bilineari.

Applicazioni bilineari e matrici. Costruzione della matrice C associata ad una forma bilineare e viceversa.

Cambiamento della matrice C associata ad una forma bilineare sotto cambiamento di base.

Nota: la matrice associata ad un prodotto scalare definito positivo rispetto ad una base ortonormale è la matrice identità.

Teorema (dimostrato): una matrice C in K rappresenta una forma bilineare simmetrica se e soltanto se C è una matrice simmetrica.

Operatori simmetrici.

Esercizio svolto: si consideri il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^2$ e l'operatore T, definito da $T(v) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$. Dimostrare che T è simmetrico. Trovare le matrici C (C') e A (A') associate al prodotto scalare e all'endomorfismo T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ($\mathcal{B}' = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$). Verificare che ${}^tA = A$ e che ${}^tA'C' = C'A'$.

Operatore aggiunto. Operatori hermitiani.

Operatori ortogonali (unitari reali).

Teorema (dimostrato): le seguenti tre proposizioni sono equivalenti: (1) T è un operatore ortogonale, (2) T tramuta basi ortogonali in basi ortogonali, (3) T conserva la norma dei vettori.

Esercizio svolto: un operatore T ortogonale è invertibile.

Lezione 28 - 7 dicembre 2010

Applicazione del metodo di riduzione a scala: nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.

Esercizio svolto: trovare dimensione e basi per il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare rappresentata in una certa base dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Applicazione del metodo di riduzione a scala: trovare dimensione e base del sottospazio generato da un insieme di vettori.

Esercizio svolto: trovare dimensione e base di $U = \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3)$, con $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Applicazione del metodo di riduzione a scala: completamento di una base.

Esercizio svolto: dati i due vettori linearmente indipendenti $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 =$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, completare la base di $\mathbb{R}^4$.

Applicazione del metodo di riduzione a scala: dimensione e base di $U+W$.

Esercizio svolto: dati i sottospazi $U = \text{Span}(u_1, u_2)$ e $W = \text{Span}(w_1, w_2)$, con $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, trovare dimensione e base di $U + W$.

Esercizio svolto: dati i sottospazi $U = \text{Span}(u_1, u_2)$ e $W = \text{Span}(w_1, w_2)$, con $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, trovare dimensione e base di $U \cap W$.

Applicazione metodo di eliminazione di Gauss: calcolo matrice inversa.

Esercizio svolto: trovare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Applicazione metodo di eliminazione di Gauss: calcolo dei determinanti.

Esercizio svolto: calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Teorema degli orlati. Esempio di applicazione.

Lezione 29 - 9 dicembre 2010

Teorema (dimostrato): una matrice $n \times n$ è ortogonale se e solo se le sue colonne costituiscono una base ortogonale rispetto al prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio svolto: trovare tutte le matrici ortogonali $A \in O(2)$. Interpretazione geometrica.

Operatori unitari.

Indice di nullità.

Teorema (dimostrato): una forma bilineare è non degenere se e solo se l'indice di nullità è uguale a zero.

Teorema di Sylvester (dimostrato). Indice di positività.

Esercizio svolto: trovare indice di positività e di nullità della forma bilineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Lezione 30 - 14 dicembre 2010

Grado di un polinomio.

Radice di un polinomio.

Teorema: un polinomio di grado n in campo complesso ha n radici in $\mathbb{C}$.

Molteplicità delle radici di un polinomio.

Polinomi di matrici. Esempi e proprietà.

Teorema (dimostrato): data A matrice $n \times n$ sul corpo K, esiste un polinomio non nullo f tale che $f(A) = 0$.

Autovalori ed autovettori di un operatore. Definizione.

Autovalori ed autovettori di una matrice $n \times n$. Definizione.

Esempio: trovare autovalori ed autovettori di una matrice diagonale.

Teorema (dimostrato): autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Teorema (dimostrato): λ è autovalore di un operatore A se e solo se $A - \lambda I$ non è invertibile.

Teorema (dimostrato): dato un operatore A in uno spazione vettoriale V su $\mathbb{C}$, con $\dim(V) \geq 1$, esiste un autovettore di A.

Matrice associata ad un operatore rispetto ad una base di autovettori.

Definizione di operatori (e matrici) diagonalizzabili.

Lezione 31 - 14 dicembre 2010

Esercizio svolto: Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, indice di positività e di nullità della forma bilineare simmetrica rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \\ k^2 & 0 & k^3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio svolto: Dire se la funzione $\nu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\nu(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_2|)$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è una norma, cioé se soddisfa alle proprietà della norma di un vettore.

Esercizio svolto: Si dimostri che le matrici

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base per lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 sul corpo complesso.

Esercizio svolto: Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$f(x, y, z) = (-x + kz, kz, y + z), \quad k \in \mathbb{R},$$

determinare, al variare di k, una base per il nucleo e una base per l'immagine di f. Dire per quali k l'applicazione è iniettiva e/o suriettiva.

Esercizio svolto: Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire per quali valori di k la matrice è invertibile e ove possibile trovare la matrice inversa.

Lezione 32 - 15 dicembre 2010

Esercizio svolto: trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio svolto: trovare autovalori ed autovettori della seguente matrice: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Esercizio: trovare autovalori ed autovettori della seguente matrice: $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Polinomio caratteristico: definizione ed esempi.

Teorema (dimostrato) λ è un autovalore di una matrice A se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico di A.

Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore.

Esercizio svolto: trovare gli autovalori (con relative molteplicità algebriche e geometriche) della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Esercizio: trovare gli autovalori (con relative molteplicità algebriche e geometriche) della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Teorema (dimostrato): la molteplicità geometrica di un autovalore è minore od uguale alla sua molteplicità algebrica.

Teorema (dimostrato): date due matrici $n \times n$ A e B, con B invertibile, abbiamo $p_A(\lambda) = p_{B^{-1}AB}(\lambda)$.

Lezione 33 - 16 dicembre 2010

Esercizio svolto: dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a \neq 0$, è diagonalizzabile.

Teorema (dimostrato): un operatore $T : V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale V e per ogni autovalore la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica.

Ventaglio. Base a ventaglio. Matrice (triangolare superiore) associata ad un operatore relativamente ad una base a ventaglio.

Operatori triangolabili. Matrici triangolabili.

Teorema: dato un operatore A definito in uno spazio vettoriale complesso, esiste un ventaglio per A.

Teorema di Hamilton-Cayley (dimostrato).

Esercizio svolto: calcolare A^{41}, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & i & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

Lezione 34 - 21 dicembre 2010

Proprietà degli autovalori di un'applicazione unitaria.

Teorema (dimostrato): dato V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ dotato di prodotto hermitiano definito positico e A applicazione unitaria da V in V, esiste una base ortonormale di V costituita da autovettori di A.

Corollario (dimostrato): data A matrice unitaria $n \times n$, esiste una matrice unitaria $n \times n$ U tale che ${}^t\bar{U}AU$ sia una matrice unitaria diagonale.

Proprietà degli autovalori e degli autovettori di una matrice reale simmetrica.

Teorema spettrale, caso reale (dimostrato).

Corollario del teorema spettrale: data A matrice simmetrica reale $n \times n$, esiste una matrice unitaria reale $n \times n$ U tale che ${}^tUAU$ sia una matrice diagonale.

Teorema spettrale, caso complesso.

Lezione 35 - 21 dicembre 2010

Esercizio svolto: trovare autovalori ed autovettori della seguente matrice: $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Esercizio svolto: autovettori di un operatore simmetrico corrispondenti ad autovalori distinti sono mutuamente ortogonali.

Esercizio svolto: trovare una trasformazione di similitudine che diagonalizzi la matrice $\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio svolto: calcolare indice di positività e di nullità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lezione 36 - 21 dicembre 2010

Esercizio svolto: discutere la diagonalizzabilità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio svolto: si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & k \end{pmatrix},$$

con $k \in \mathbb{R}$. Tale matrice opera sullo spazio $\mathbb{R}^2$, nel quale è definito l'ordinario prodotto scalare $\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ generici vettori in $\mathbb{R}^2$. Determinare:

(a) per quali valori del parametro k la matrice è invertibile;
(b) per quali valori di k la matrice ammette autovalori in $\mathbb{R}$ ed autovettori in $\mathbb{R}^2$;
(c) per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile;
(d) per quali valori di k si possono trovare autovettori mutuamente ortogonali.

Esercizio svolto: sia $\mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di una variabile reale di grado minore od uguale a due.
a) Dimostrare che l'applicazione $\phi : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$, definita da

$$\phi(p(t)) = p(ht+1), \quad p(t) \in \mathbb{R}_2[t], \;\; h \in \mathbb{R}$$

è lineare.
b) Determinare, al variare di h, gli autovalori e gli autospazi di ϕ.
c) Dire per quali h l'applicazione ϕ è diagonalizzabile.