ELETTROSTATICA – RIEPILOGO CONCETTI FONDAMENTALI

La **legge di Coulomb** afferma che la forza (coulombiana) che si esercita tra due cariche puntiformi q_1 e q_2 poste nel vuoto ha la direzione della loro congiungente, è direttamente proporzionale alla grandezza di ciascuna carica ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza r che le separa. La forza che agisce sul primo corpo a causa del secondo è data da

$$\vec{F}_{12} = -K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}, \tag{1}$$

con la costante (positiva) K che dipende dalla scelta delle unità di misura (nel sistema internazionale $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$, con $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ $\mathrm{C}^2/(\mathrm{N{\cdot}m}^2)$ detta costante dielettrica del vuoto) e il versore (diretto dalla prima alla seconda carica)

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r}. \tag{2}$$

Per il principio di azione e reazione la forza che agisce sul secondo corpo a causa del primo vale

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \tag{3}$$

Data una distribuzione di cariche in **equilibrio elettrostatico**, definiamo il **campo elettrostatico** generato da tale distribuzione come il rapporto tra la forza esercitata su una carica di prova q e la carica medesima, nel limite $q \to 0$:

$$\vec{E}(x, y, z) = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}(x, y, z)}{q}. \tag{4}$$

Essendo le forze elettriche **a due corpi**, la forza totale agente su una carica di prova q posta in un punto $P = (x, y, z)$ è la somma vettoriale delle forze dovute alle singole cariche Q_i, per cui il campo elettrostatico in P è la somma (vettoriale) dei campi elettrostatici creati in P dalle singole cariche:

$$\vec{E}(P) = \sum_i \vec{E}_i(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i, \tag{5}$$

($\vec{r}_i$ vettore che congiunge il punto O_i dove si trova la carica Q_i al punto P). Questa proprietà va sotto il nome di **principio di sovrapposizione**.

Definiamo il **flusso** di un campo vettoriale $\vec{u}$ attraverso una superficie S come

$$\Phi_S(\vec{u}) = \int_S \vec{u} \cdot \hat{n} dS, \tag{6}$$

con $\hat{n}$ versore normale alla superficie in corrispondenza dell'elemento di superficie dS.

Il **teorema di Gauss per il campo elettrostatico** afferma che il flusso del campo elettrostatico $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa S è uguale alla somma algebrica delle cariche elettriche contenute all'interno della superficie chiusa considerata, divisa per la costante dielettrica del vuoto ϵ_0:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \tag{7}$$

Nel caso del campo gravitazionale

$$\Phi_S(\vec{g}) = 4\pi G \sum_i M_i, \tag{8}$$

con $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/Kg^2 costante di gravitazione universale e $\vec{g}$ campo gravitazionale. Il teorema di Gauss vale in entrambi i casi in quanto sia la forza elettrostatica che quella gravitazionale sono inversamente proporzionali al quadrato della distanza (tra due cariche o tra due masse che interagiscono). La differenza fondamentale tra i due casi è che le cariche elettriche possono essere sia positive che negative, mentre le masse sono solo positive. Questo riflette il fatto che la forza elettrostatica può essere sia attrattiva che repulsiva mentre quella gravitazionale è solo attrattiva.
Per una distribuzione continua di carica, con densità $\rho(x, y, z)$, il teorema di Gauss si scrive come segue:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(x, y, z) dV. \tag{9}$$

Siccome il campo elettrostatico è **conservativo**, possiamo definire un **potenziale elettrostatico** V, definendo la differenza di potenziale $V(B) - V(A)$ tra due punti A e B come il rapporto (cambiato di segno) tra il lavoro (indipendente dal cammino) che compie il campo elettrostatico quando una carica q puntiforme si sposta da A a B e la carica medesima:

$$V(B) - V(A) = -\frac{L_{A\to B}}{q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}. \tag{10}$$

Per il principio di sovrapposizione il potenziale elettrostatico generato in un punto P da un insieme di cariche puntiformi $Q_1, Q_2, ...$ è uguale alla somma (scalare) dei potenziali $V_1(P), V_2(P), ...$ dovuti alle singole cariche: $V(P) = \sum_i V_i(P)$.
Il campo elettrostatico è legato al potenziale elettrostatico dalla relazione

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V. \tag{11}$$

Definiamo l'**energia potenziale elettrostatica** in un punto P come

$$U(P) = qV(P). \tag{12}$$

Nel caso del campo elettrostatico

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \tag{13}$$

dove l'uguaglianza discende dal fatto che il campo elettrostatico è conservativo.

Il **teorema di Coulomb** afferma che il campo elettrico in prossimità della superficie di un corpo conduttore vale

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}, \tag{14}$$

con σ densità superficiale di carica, ϵ_0 costante dielettrica del vuoto (assumiamo il corpo immerso nel vuoto) e $\hat{n}$ versore normale alla superficie e con verso uscente dalla medesima. Si noti che la direzione del campo elettrico è normale alla superficie in quanto la presenza di un campo elettrico tangenziale muoverebbe le cariche sulla superficie del conduttore e non si avrebbe quindi una situazione di equilibrio elettrostatico. Il verso del campo è uscente oppure entrante a seconda che il conduttore sia carico positivamente ($\sigma > 0$) o negativamente ($\sigma < 0$).

Chiamiamo la **capacità elettrica** C di un corpo come il rapporto fra la carica Q accumulata sul corpo e il potenziale elettrostatico V del corpo medesimo. Un **condensatore** è un componente elettrico che immagazzina l'energia in un campo elettrostatico, accumulando al suo interno carica elettrica. La configurazione base di un condensatore è costituita da due conduttori (**armature**) che posseggono carica uguale ma di segno opposto, $+Q$ e Q. Le due armature del condensatore sono separate dall'aria o da un altro dielettrico. La capacità C di un condensatore è definita come il rapporto tra la carica Q immagazzinata nelle armature del condensatore e la differenza di potenziale V tra tali armature.
L'energia elettrostatica immagazzinata da un condensatore vale

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\,Q\,\Delta V. \tag{15}$$

La **densità di energia elettrostatica** immagazzinata nello spazio fra le due armature del condensatore (dove il campo elettrico $\vec{E}$ è non nullo) vale

$$u = \frac{1}{2}\,\epsilon_0\epsilon_r E^2, \tag{16}$$

con $\epsilon_r > 1$ costante dielettrica relativa del mezzo che si trova tra le due armature (per l'aria $\epsilon_r \approx 1$).
La capacità equivalente di un gruppo di N condensatori collegati in parallelo è uguale alla somma delle capacità dei singoli condensatori:

$$C_e = \sum_{i=1}^{N} C_i. \tag{17}$$

L'inverso della capacità equivalente di un gruppo di N condensatori collegati in serie è uguale alla somma degli inversi delle capacità dei singoli condensatori:

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}. \tag{18}$$