CORSO DI ALGEBRA LINEARE. A.A. 2004-2005.

Esercitazione del 10 Gennaio 2005. (Prof. Mauro Saita, e-mail: maurosaita@tiscalinet.it)

1 Spazi vettoriali. Sottospazi.

Esercizio 1.1 *Siano* $v_1 = (2,5,1,3)$, $v_2 = (0,2,7,9)$, $v_3 = (2,3,0,4)$, $v_4 = (4,10,8,16)$ *quattro vettori di* $\mathbb{R}^4$. *Determinare una base dello spazio vettoriale* $L(v_1, v_2, v_3, v_4)$ *generato dai vettori* v_1, v_2, v_3, v_4.

Esercizio 1.2 *Sia* $U = L(u_1, u_2)$ *e* $V = L(v_1)$, *dove* $u_1 = (1,0,-2,1)$, $u_2 = (0,2,1,4)$, $v_1 = (2,1,1,1)$.

1. *Determinare la dimensione e una base di* $U + V$.
2. *Determinare la dimensione di* $U \cap V$.

Esercizio 1.3 *Sia* $U = L(u_1, u_2)$ *e* $V = L(v_1, v_2)$, *dove* $u_1 = (-1,0,3,2)$, $u_2 = (0,-1,1,3)$, $v_1 = (2,1,1,-2)$, $v_2 = (1,0,5,3)$.

1. *Determinare la dimensione e una base di* $U + V$.
2. *Determinare la dimensione di* $U \cap V$.

Esercizio 1.4 *Si considerino le seguenti matrici di tipo* 2×2:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1. *Mostrare che* A, B, C *sono linearmente indipendenti.*
2. *Trovare un sottospazio* $W \subseteq Mat(n \times n, \mathbb{R})$ *per il quale si abbia:*

$$\dim W = 2 \quad e \quad \dim \Big(W \cap L(A,B,C) \Big) = 1.$$

Esercizio 1.5 *Si considerino i polinomi* $p = 1 + x$, $\quad q = x + x^2$, $\quad r = 1 + x + x^2$, $s = 1 + 2x + 3x^2$. *Rispondere alle seguenti domande:*

1. p, q, r, s *sono linearmente indipendenti?*
2. p, q, r, s *generano lo spazio vettoriale* $R_2[x] = \{a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2\}$ *dei polinomi di grado minore o uguale a due?*

2 Determinanti.

Esercizio 2.1 *Utilizzando "il metodo di riduzione a scala", calcolare il determinante della matrice* $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.2 (Vero o Falso?) *Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false motivando le risposte.*

1. *Se* A *e* B *sono due matrici di tipo* $n \times n$ *allora* $\det(A+B) = \det A + \det B$.
2. *Se* A *è una qualunque matrice di tipo* $n \times n$ *e sia* λ *è un numero qualunque, allora* $\det \lambda A = \lambda \det A$.
3. *Se* A *è una qualunque matrice di tipo* $n \times n$ *allora* $\det(-A) = -\det A$.
4. *Se* A, P *sono matrici di tipo* $n \times n$ *e* P *è invertibile, allora* $\det P^{-1}AP = \det A$.

Esercizio 2.3 *Trovare l'area del triangolo di vertici* $P = (1,2)$, $Q = (9,3)$, $R = (6,6)$.

Esercizio 2.4 *Spiegare geometricamente perché il determinante della matrice* $\begin{vmatrix} a & c \\ 0 & b \end{vmatrix}$ *non dipende da* c.

Esercizio 2.5 *Trovare il volume del parallelepipedo di spigoli*

1. $P = (-1,0,2)$, $Q = (1,3,1)$, $R = (1,1,0)$.
2. $U = (3,0,2), V = (0,1,1), W = (0,1,-5)$.

Esercizio 2.6 *Determinare l'equazione cartesiana del piano che contiene i punti* $A(1,0,1)$, $B(0,2,1)$, $C(1,1,0)$.

Esercizio 2.7 *Dire se i vettori* $A(1,1,1)$, $B(0,3,-1)$, $C(1,4,0)$ *sono linearmente indipendenti.*

Esercizio 2.8 *Stabilire per quali valori del parametro* k *i vettori* $(1,0,2), (1,k,-1), (k,0,3)$ *sono linearmente dipendenti.*

Esercizio 2.9 *Dimostrare che se la matrice quadrata* A *è invertibile, allora*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Esercizio 2.10 *Una matrice quadrata* A *si dice ortogonale se è invertibile e* $A^t = A^{-1}$. *Dimostrare che, se* A *è una matrice ortogonale,* $\det A = 1$ *oppure* $\det A = -1$.

Esercizio 2.11 *Dimostrare che l'area della regione del piano racchiusa dall'ellisse di equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

è πab.

3 Sistemi lineari.

Esercizio 3.1 *Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, risolvere i seguenti sistemi lineari:*

1.
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

2.
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 9x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}\right.$$

3.
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

4.
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 26 \end{array}\right.$$

4 Risposte o suggerimenti a alcuni degli esercizi proposti.

Esercizio 1.1 Si consideri la martice A le cui righe sono le componenti dei vettori v_1, v_2, v_3, v_4. Riducendo a scala la matrice A si ottiene

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 10 & 8 & 16 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & 8 & 16 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = A'$$

Poiché *lo spazio vettoriale generato dalle righe di A coincide con lo spazio vettoriale generato dalle righe di A'*, si ha $\dim L(v_1, v_2, v_3, v_4) = 3$. Inoltre, si verifichi che i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base di $L(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Esercizio 1.2

1. Si verifichi che $U + V = L(u_1, u_2, v_1)$. Si costruisca la matrice 3×4 avente per righe le componenti dei vettori u_1, u_2, v_1 e la si trasformi, riducendola a scala, nella matrice A'. Il numero di righe di A' diverse da zero fornisce il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A. Inoltre, le righe di A corrispondenti alle righe di A' diverse da zero costituiscono una base di $U + V$.

2. Dalla formula di Grassmann si ricava

$$\begin{array}{ccccccc} \dim(U+V) & + & \dim(U \cap V) & = & \dim U & + & \dim V \\ 3 & + & \dim(U \cap V) & = & 2 & + & 1 \end{array}$$

Quindi, $\dim(U \cap V) = 0$.

Esercizio 1.5

1. Una base di $R_2[x]$ è $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ e $\dim R_2[x] = 3$. Pertanto, quattro elementi di $R_2[x]$ sono linearmente dipendenti.

2. Rispetto alla base $\mathcal{B}$ i quattro polinomi assegnati hanno le seguenti componenti:

   $p = (1, 1, 0)$, $q = (0, 1, 1)$, $r = (1, 1, 1)$, $s = (1, 2, 3)$. Si costruisca allora la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

   le cui righe sono le componenti di p, q, r, s e si calcoli $\dim L(p, q, r, s)$, cioè il rango di A. Per fare ciò si può procedere nel seguente modo: utilizzando esclusivamente 'operazioni elementari riga', trasformare la matrice A nella matrice a scala A'. *Lo spazio vettoriale generato dalle righe di A coincide con lo spazio vettoriale generato dalle righe di A'*; pertanto il numero di righe di A' diverse da zero fornisce la dimensione di $L(p, q, r, s)$. Nel caso in esame si ottiene $\dim L(p, q, r, s) = 3$; una base di $L(p, q, r, s)$ è rappresentata dai polinomi p, q, r.

Esercizio 2.1 Un modo di calcolare il determinante di una matrice A consiste nel trasformarla, mediante operazioni elementari sulle righe, in una matrice A' ridotta a scala , tenendo però conto dell'effetto che queste operazioni hanno sul determinante:

1. Se si moltiplica una riga per un numero $\lambda \neq 0$ il determinante viene moltiplicato per λ;

2. Se si somma alla riga i-esima un multiplo della riga j-esima, con $i \neq j$, il determinante non cambia;

3. Se si scambiano di posto due righe il determinante cambia di segno.

Pertanto, $\det A$, a meno di una costante moltiplicativa, coincide con $\det A'$.

Infine, verificare (esercizio) che il determinante di una qualsiasi matrice a scala è il prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

Esercizio 2.2 1. Falso; 2. Falso; 3. Falso; 4. Vero.

Esercizio 2.3 $Area = \frac{1}{2} |\det \begin{vmatrix} Q - P \\ R - P \end{vmatrix}| = 27/2$

Esercizio 2.5 1. $Volume = |\det \begin{vmatrix} P \\ Q \\ R \end{vmatrix}| = |\det \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = 3$

Esercizio 2.6 $\det \begin{vmatrix} X - A \\ B - A \\ C - A \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, cioè $2x + y + z - 3 = 0$

Esercizio 2.7 $\det \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \end{vmatrix} = 0$ pertanto i vettori sono linearmente dipendenti.

Esercizio 3.1 Sia $AX = b$ uno qualunque dei sistemi proposti. Utilizzando solamente 'operazioni elementari sulle righe' trasformare la matrice $|A, b|$ (matrice completa del sistema) nella *matrice a scala* $|A', b'|$.

1. La terza riga di $|A', b'|$ è del tipo $|0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; h|$, $h \neq 0$. Il sistema non ammette soluzioni.

2. La seconda e la terza riga di $|A', b'|$ sono costituite esclusivamente da zeri. Il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da due parametri reali:

$$Sol(A, b) = \{(\frac{7}{10}, 0, 0, 0) + (-\frac{1}{10}, 0, \frac{4}{5}, 1)t + (\frac{3}{2}, 1, 0, 0)s \quad t, s \in \mathbb{R}\}$$

3. La terza riga di $|A', b'|$ è costituita esclusivamente da zeri. Il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro reale:

$$Sol(A, b) = \{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)t, \quad t \in \mathbb{R}\}$$

4. Il sistema ammette l'unica soluzione $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.