CORSO DI ALGEBRA LINEARE. A.A. 2004-2005.

Esercitazione del 17 Gennaio 2005. (Prof. Mauro Saita, e-mail: maurosaita@tiscalinet.it)

1 Somme dirette.

Esercizio 1.1 *Sia* $v_1 = (2, -1, 0)$, $v_2 = (3, 0, -1)$ *e* $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$.

1. *Dimostrare che* (v_1, v_2) *è una base di* V.
2. *Dimostrare che* $\mathbb{R}^3 = V \oplus L(v_3)$, *dove* $v_3 = (1, 2, 3)$.
3. *Scrivere* $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$ *con* $W \neq L(v_3)$.

Esercizio 1.2 (Vero o Falso?) *Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false motivando le risposte.*

1. *Se* $V = U_1 \oplus U_2$ *allora* $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$
2. *Se* $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$ *allora* $V = U_1 + U_2$

Esercizio 1.3 *Sia* $S_n = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A = {}^tA\}$ *lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche* $n \times n$ *sul campo* $\mathbb{R}$ *e* $A_n = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A = -{}^tA\}$ *lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche* $n \times n$ *sul campo* $\mathbb{R}$.

1. *Determinare* $\dim S_n$ *e* $\dim A_n$.
2. *Dimostrare che ogni matrice quadrata* $n \times n$ *si scrive, in modo unico, come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica. In altri termini, dimostrare che*
$$M(n \times n, \mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$$

2 Applicazioni lineari.

Esercizio 2.1 *Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari motivando la risposta*

1. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x - 2y + z$.
2. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (e^{2x+y}, z - y)$.
3. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x^2 + y + 3z$.
4. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
5. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (3x - 5y, x + 2y - 1)$.
6. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^3}} \mathbb{R}^3$, $1_{\mathbb{R}^3}(x, y, z) = (x, y, z)$.

Esercizio 2.2 *Rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^2$ *determinare le matrici che rappresentano le seguenti applicazioni lineari:*

1. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{R_O^\alpha} \mathbb{R}^2$, *rotazione attorno all'origine di angolo* α.
2. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{S_\theta} \mathbb{R}^2$, *simmetria rispetto alla retta* r *passante per l'origine e che forma con l'asse* x *l'angolo* $\widehat{xr} = \theta$.

Esercizio 2.3 *Rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *determinare le matrici che rappresentano le seguenti applicazioni lineari:*

1. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{P} \mathbb{R}^3$, *proiezione ortogonale nel piano* xy *di* $\mathbb{R}^3$.
2. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3$, *simmetria rispetto al piano* yz *di* $\mathbb{R}^3$.
3. $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{R_O^\alpha} \mathbb{R}^3$, *rotazione attorno all'asse* z *di angolo* α.

Esercizio 2.4 *Si consideri l'applicazione lineare* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (x-2z, x+y+z, 3y-z)$. *Scrivere la matrice* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ *che rappresenta* F *rispetto alla base canonica* $\mathcal{B}$.

Esercizio 2.5 *Sia* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{P_x} \mathbb{R}^2$ *la proiezione ortogonale di* $\mathbb{R}^2$ *sull'asse* x *e* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{R} \mathbb{R}^2$ *la rotazione attorno all'origine di un angolo* $\theta = \frac{\pi}{2}$. *Possiamo affermare che* $P_x \circ R = R \circ P_x$*?. Motivare la risposta.*

Esercizio 2.6 *Siano* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{G} \mathbb{R}$ *due applicazioni lineari così definite:*

$F(x,y) = (2x-5y, 3x, x-y)$, $G(x,y,z) = (2x-y+5z)$. *Determinare* $\mathcal{M}(G \circ F)$ *e scrivere in modo esplicito* $G \circ F$.

Esercizio 2.7 *Siano* $R_O^\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *e* $R_O^\beta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *le rotazioni attorno all'origine rispettivamente di angoli* α *e* β. *Trovare la matrice* $M(R_O^\beta \circ R_O^\alpha)$ *che rappresenta* $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$ *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2.8 *Sia* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{S_\theta} \mathbb{R}^2$ *la simmetria rispetto alla retta* r *passante per l'origine e formante con l'asse* x *un angolo* $\widehat{xr} = \theta$.

1. *Trovare* $\mathcal{M}(S_\theta)$, $\mathcal{M}(S_{\frac{\pi}{12}})$ *e* $\mathcal{M}(S_{\frac{\pi}{3}})$.
2. *Verificare che l'applicazione lineare* $S_{\frac{\pi}{3}} \circ S_{\frac{\pi}{12}}$ *è una rotazione attorno all'origine di angolo* $\dfrac{\pi}{2}$.

Esercizio 2.9 *Sia* $A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & k \end{vmatrix}$ *e sia* $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare definita ponendo* $L_A(X) = AX$, *per ogni* $X \in \mathbb{R}^3$.

1. *Dire per quali valori del numero reale* k, *l'applicazione* L_A *è iniettiva.*

2. *Dire per quali valori del numero reale k, l'applicazione L_A è suriettiva.*

3. *Determinare, per ogni $k \in I\!R$, una base di $\ker(F)$ e una base di $\mathrm{Im}\,(F)$.*

Esercizio 2.10 *Sia $M(n \times n, I\!R)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n sul campo $I\!R$ e $A = \left(a_{ij}\right)$ una qualunque matrice di tale spazio. Dimostrare che, la funzione 'traccia'*

$$M(n \times n, I\!R) \xrightarrow{tr} I\!R, \qquad tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

è un'applicazione lineare. Dimostrare inoltre che

1. *Il sottospazio di $M(n \times n, I\!R)$ delle matrici a traccia nulla ha dimensione $n^2 - 1$. In altre parole, verificare che $\dim \mathrm{Ker}\, tr = n^2 - 1$.*

2. $tr(AB) = tr(BA)$

3. $tr(B^{-1}AB) = trA$

Esercizio 2.11 *Sia $F : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$F(x, y) = (x - y, 0, 2x - 2y),$$

e sia $G : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$G(x, y, z) = (x, 0, x - z).$$

1) *Trovare una base di* $\mathrm{Im}\, F$.

2) *Trovare una base di* $\ker F$.

3) *Dette rispettivamente $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ le basi canoniche di $I\!R^2$ e di $I\!R^3$, scrivere la matrice*

$$M^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{C}_3}(G \circ F)$$

Esercizio 2.12 *Rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $I\!R^2$, il vettore v ha coordinate $(2, -1)$. Trovare le componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}'$ costituita dai vettori $e'_1 = (1, 3)$, $e'_2 = (-1, -1)$.*

Esercizio 2.13 *Si consideri la base $\mathcal{B}' = ((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 1))$ di $I\!R^3$ e sia v il vettore di coordinate $(1, 2, 0)$ rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $I\!R^3$. Trovare le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}'$.*

Esercizio 2.14 *Sia $I\!R^2 \xrightarrow{S} I\!R^2$, la simmetria rispetto alla bisettrice $x - y = 0$. Sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonica di R^2 e $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ un'altra base di $I\!R^2$ così definita: $e'_1 = (1, 1) = e_1 + e_2$, $e'_2 = (1, -1) = e_1 - e_2$.*
Determinare $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(S)$ e $\mathcal{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(S)$.

Esercizio 2.15 *In $I\!R^3$ si considerino le basi $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ dove*

$$e_1' = e_3,\ e_2' = e_1 - e_2,\ e_3' = e_2.$$

Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$ *l'operatore così definito:*

$$F(e_1) = e_1 + e_2,\ F(e_2) = e_3,\ F(e_3) = 0$$

1. *Trovare* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$
2. *Trovare* $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F)$
3. *Sia* v *il vettore di* $\mathbb{R}^3$ *le cui coordinate, rispetto alla base* $\mathcal{B}'$*, sono* $[v]_{\mathcal{B}'} = (1, 0, 1)$*. Scrivere le coordinate* $[v]_{\mathcal{B}}$ *di* v *rispetto alla base* $\mathcal{B}$*.*

Esercizio 2.16 *Se* V *è uno spazio euclideo, un operatore* [1] *lineare* $V \xrightarrow{L} V$ *si dice* simmetrico *o* auto-aggiunto *(rispetto al fissato prodotto scalare) se vale l'uguaglianza*

$$(Lv, w) = (v, Lw) \tag{2.1}$$

per ogni v, w *in* L*.*

Dimostrare che l'operatore $V \xrightarrow{L} V$ *è simmetrico se e solo se, per ogni base* ortonormale $\mathcal{B}$ *di* V*, la matrice che rappresenta* L *rispetto a* $\mathcal{B}$ *è simmetrica.*

Esercizio 2.17 *Sia* $\mathcal{B}$ *una base ortonormale di* $\mathbb{R}^n$ *Si consideri l'applicazione lineare* $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{L} \mathbb{R}^3$*. Dimostrare che se la matrice che rappresenta* L *rispetto a una particolare base ortonormale* $(v_1, ..., v_n)$ *è simmetrica, allora la matrice che rappresenta* L *rispetto a qualunque altra base ortonormale è anche simmetrica.*

2.1 Risposte o suggerimenti a alcuni degli esercizi proposti

Esercizio 1.1

1. Il sottospazio U è un piano passante per l'origine e v_1 e v_2 appartengono a U(perché?). Inoltre, v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti e di conseguenza formano una base di U.
2. Il sottospazio $L(v_3)$ costituisce una retta passante per l'origine *non contenuta nel piano* U. Quindi $\dim U \cap L(v_3) = 0$ e $\mathbb{R}^3 = V \oplus L(v_1)$.
3. Basta scegliere $W = L(v_4)$, dove $L(v_4)$ è una qualunque retta passante per l'origine e distinta da $L(v_3)$.

Esercizio 1.2

1. Vera. Infatti, dalla formula di Grassmann si ha:

$$\begin{array}{ccccccc} \dim(U_1 + U_2) & + & \dim(U_1 \cap U_2) & = & \dim U_1 & + & \dim U_2 \\ \dim V & + & 0 & = & \dim U_1 & + & \dim U_2 \end{array}$$

[1] Un *operatore* lineare - o, semplicemente, *operatore* - di uno spazio vettoriale V è un'applicazione lineare con dominio e codominio coincidenti con V.

2. Falsa. Infatti,

$$\dim V = \dim(U_1 + U_2) \quad \text{NON IMPLICA} \quad V = U_1 + U_2$$

Controesempio: Sia U_1 un piano passante per l'origine e U_2 una retta (passante per l'origine) contenuta in U_1. Si ha $\dim U_1 + \dim U_2 = 3$ mentre $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 = 2$.

Esercizio 2.11 1) Una base di Im F è $(1, 0, 2)$.

2) Una base di $\ker F$ è $(1, 1)$.

3) La matrice che rappresenta l'applicazione $G \circ F$ è

$$M_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}_2}(G \circ F) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 2.15 1) Per trovare, ad esempio, la prima colonna di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$, scriviamo $F(e_1)$ come combinazione lineare di e_1, e_2, e_3:

$$F(e_1) = e_1 + e_2 + 0 \cdot e_3 :$$

la prima colonna è costituita dai coefficienti:

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Allo stesso modo troviamo le altre colonne:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2) Ricaviamo:

$$e_1 = e'_2 + e'_3, \quad e_2 = e'_3, \quad e_3 = e'_1.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} &F(e'_1) = F(e_3) = 0 \\ &F(e'_2) = F(e_1 - e_2) = F(e_1) - F(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 = -e'_1 + e'_2 + 2e'_3 \\ &F(e'_3) = F(e_2) = e_3 = e'_1. \end{aligned}$$

Ne segue:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

3) Poiché $v = e'_1 + e'_3 = e_3 + e_2$, abbiamo $[v]_{\mathcal{B}} = (0, 1, 1)$.