CORSO DI ALGEBRA LINEARE: Esercitazione n.1 del 20/12/2004.

Mauro Saita, e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

1 Spazi vettoriali. Sottospazi.

Esercizio 1.1 *Determinare tutti i sottospazi vettoriali degli spazi vettoriali* R, $I\!R^2$, $I\!R^3$ *motivando le risposte.*

Esercizio 1.2 *Dire se l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a* n

$$R_n[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in I\!R\}$$

è uno spazio vettoriale e, in caso affermativo, determinare una base di tale spazio.

Esercizio 1.3 *L'insieme* $P_2 = \{a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ \ a_2, a_1, a_0 \in I\!R,\ a_2 \neq 0\}$ *di tutti i polinomi di grado 2 è uno spazio vettoriale?*

Esercizio 1.4 *Sia* $W = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$.

a) Dimostrare che W *è un sottospazio vettoriale di* R^3.

b) Trovare una base di W *e la sua dimensione.*

Esercizio 1.5 *Stabilire se il vettore* $v = (2, 3, 1)$ *di* $I\!R^3$ *appartiene allo spazio vettoriale generato dai vettori* $w_1(1, 1, 2)$, $w_2 = (5, 7, 4)$

2 Applicazioni lineari.

Esercizio 2.1 *Sia* $\mathcal{C}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonica di* $I\!R^3$. *Determinare la matrice che rappresenta, rispetto a* $\mathcal{C}_3$, *la proiezione ortogonale nel piano* xy.

Esercizio 2.2 *Sia* $\mathcal{C}_2 = (e_1, e_2)$ *la base canonica di* $I\!R^2$. *Determinare la matrice che rappresenta, rispetto a* $\mathcal{C}_2$, *la rotazione attorno all'origine di angolo* α.

Esercizio 2.3 *Sia* $\mathcal{C}_2 = (e_1, e_2)$ *la base canonica di* $I\!R^2$. *Siano* $F : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ *e* $G : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ *due applicazioni lineari definite, rispetto alla base* (e_1, e_2) *di* $I\!R^2$, *nel seguente modo:*

$$F(e_1) = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}, \ F(e_2) = \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix}, \qquad e \qquad G(e_1) = \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}, G(e_2) = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

1. *Determinare, rispetto alla base* $\mathcal{C}_2$ *la matrice* $M(G \circ F)$ *associata all'applicazione lineare* $G \circ F$.

2. *Scrivere in modo esplicito* $G \circ F$.

3. *Verificare che* $M(G \circ F) = M(G)\, M(F)$.

Esercizio 2.4 *Siano $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ due applicazioni lineari così definite:*

$$F \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x - 5y \\ 3x \\ x - y \end{vmatrix}, \qquad G \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x - y + 5z \end{vmatrix}$$

Determinare la matrice $M(G \circ F)$ e scrivere in modo esplicito $G \circ F$.

3 Sistemi lineari. Il metodo di eliminazione di Gauss

Con il *metodo di eliminazione di Gauss* si trasforma un sistema lineare in un sistema equivalente, ma più semplice da risolvere. Le operazioni che si effettuano sulle equazioni di un sistema per semplificarlo sono:

1. Moltiplicare un'equazione per un numero diverso da zero.
2. Sommare l'equazione i-esima all'equazione j-esima ($i \neq j$);
3. Scambiare di posto due equazioni.

Queste operazioni si riflettono nelle seguenti operazioni elementari sulle righe della matrice completa $[A, b]$ del sistema:

1. Moltiplicare una riga per un numero $\lambda \neq 0$;
2. sommare la riga i-esima alla riga j-esima ($i \neq j$);
3. scambiare di posto due righe.

Supponiamo di dovere risolvere un sistema lineare di m equazioni in n incognite, diciamo $AX = b$, dove A è una matrice $m \times n$, X è la colonna delle n incognite e $b \in \mathbb{R}^m$ è il vettore dei termini noti. Formiamo la matrice completa $M = [A, b]$ (di tipo $m \times (n+1)$) e effettuiamo una successione di operazioni elementari sulle righe della matrice M, per semplificarla. Sia $M' = [A', b']$ la matrice alla quale si giunge alla fine di questa successione di operazioni. Si dimostra facilmente che *le soluzioni del sistema lineare $A'X = b'$ sono esattamente quelle del sistema $AX = b$.* [Esercizio].

3.1 Esempi

Vediamo degli esempi di risoluzione di sistemi lineari con il metodo di eliminazione di Gauss.

Esempi. Risolvere i tre seguenti sistemi lineari in tre incognite:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 10x_2 & - & 11x_3 & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.1}$$

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \right. \tag{3.2}$$

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 7x_2 & - & 11x_3 & = & -3 \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Soluzione.

> 1^o *Passo.* Scrivere la matrice completa del sistema.

Le matrici complete dei sistemi $(A), (B), (C)$ sono:

$$\text{Sistema } (A): \quad \left| \begin{array}{rrrr} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & -10 & -11 & 0 \end{array} \right|$$

$$\text{Sistema } (B): \quad \left| \begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

$$\text{Sistema } (C): \quad \left| \begin{array}{rrrr} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -7 & -11 & -3 \end{array} \right|$$

> 2^o *Passo.* Con operazioni elementari sulle righe, riduciamo a scala la matrice completa. A questo punto si può dire se il sistema ha soluzioni oppure no. Precisamente, se l'ultima riga non nulla della matrice a scala ha solo l'ultimo termine diverso da zero, ossia è del tipo
>
> $$\left| \begin{array}{cccccc} 0 & . & . & . & 0 & b \end{array} \right|$$
>
> con $b \neq 0$, allora il sistema non ha soluzioni, altrimenti ne ha.
> Se il sistema non ha soluzioni, abbiamo finito. Altrimenti si passerà al successivo 3^0 Passo.

La riduzione a scala per righe delle matrici complete dei sistemi porta ai seguenti risultati.

Sistema (A):

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & -10 & -11 & 0 \end{array}\right| \simeq \left|\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \end{array}\right| \simeq \left|\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

Poiché l'ultima riga della matrice a scala è $\left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$ il sistema (A) non ha soluzioni. Infatti il sistema associato alla matrice a scala è

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \\ & & 4x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 0 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & 1 \end{array}\right. \tag{3.4}$$

ovviamente senza soluzioni (perché la terza equazione non ha alcuna soluzione). Dunque il sistema originario (A), equivalente al sistema 3.4, non ha soluzioni.

Sistema (B):

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right| \simeq \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{array}\right| \simeq$$

$$\simeq \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right| \simeq \left|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

L'ultima riga della matrice a scala non è del tipo $\left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right|$ con $b \neq 0$. Pertanto il sistema (B) è risolubile.

Sistema (C):

Riduciamo a scala per righe la matrice dei coefficienti:

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -7 & -11 & -3 \end{array}\right| \simeq \left|\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right| \simeq \left|\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

(Alla seconda riga abbiamo sommato la prima moltiplicata per -1). Poiché non compare una riga del tipo $\left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right|$ con $b \neq 0$, possiamo concludere che il sistema (C) è risolubile.

Prima di descrivere il passo successivo, diamo una definizione. Consideriamo una qualunque matrice a scala

$$A = \left|\begin{array}{cccccccc} p_1 & * & . & . & . & . & . & * \\ & & p_2 & . & . & . & . & * \\ & & & . & . & . & & \\ & & & & & p_r & . & * \\ & & & & & & & \end{array}\right|$$

dove i numeri $p_1, ..., p_r$ sono diversi da zero, al posto degli spazi vuoti ci sono tutti zeri e al posto degli asterischi ci può essere qualunque numero. I numeri non nulli $p_1, ..., p_r$ che compaiono più a sinistra su ogni riga non nulla, sono detti *pivots* della matrice a scala.

3^o *Passo.* Supponiamo che il sistema abbia soluzioni. Distinguiamo le incognite $x_1, ..., x_n$ in due classi: le variabili che stanno sulle colonne dei pivots sono variabili *dipendenti*; le eventuali restanti $n - r$ incognite sono variabili *libere*. Alle variabili libere, se ce ne sono, si attribuiscono valori arbitrari. Nell'ultima equazione (non nulla) scriviamo la variabile dipendente in funzione dei termini noti e delle eventuali variabili libere. Poi risolviamo il sistema all'indietro, sostituendo nella penultima equazione e così via, fino ad arrivare alla prima equazione.
Se non ci sono variabili libere, il sistema ha un'unica soluzione.
Se invece ci sono variabili libere, il sistema ha infinite soluzioni.

Vediamo come effettuare in concreto questo terzo passo nel caso dei sistemi (B) e (C).

Sistema (B):

I pivots della matrice a scala

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

sono sulla prima, seconda e terza colonna: non ci sono dunque variabili libere. Il sistema associato alla matrice a scala, equivalente al sistema (B), è

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + 2/3x_3 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo all'indietro, troviamo che questo sistema, e quindi il sistema originario (B), ha l'unica soluzione $(-2/3, -2/3, 1)$.

Sistema (C):

I pivots della matrice a scala

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

sono sulla prima e sulla seconda colonna: dunque le variabili dipendenti sono x_1 e x_2. La restante variabile x_3 è libera. Poiché c'è una variabile libera, il sistema ha *infinite* soluzioni. Per risolvere il sistema, cioè per dare una descrizione parametrica dell'insieme delle soluzioni, un modo è il seguente. Scriviamo il sistema associato alla matrice a scala, ossia il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Alla variabile libera x_3 diamo un valore arbitrario t:

$$x_3 = t.$$

Sostituendo nella seconda equazione, troviamo

$$x_2 = 3 - t,$$

e sostituendo ancora all'indietro nella prima equazione, troviamo infine

$$x_1 = 9 + 2t.$$

L'insieme delle soluzioni del sistema è dato in forma parametrica da

$$\begin{cases} x_1 &= 9 + 2t \\ x_2 &= 3 - t \\ x_3 &= t \end{cases}$$

Un modo migliore per trovare le soluzioni consiste nel continuare la riduzione per righe all'indietro fino a ottenere una matrice *a scala per righe in forma ridotta* (*reduced row echelon form*), ossia una matrice con i pivots tutti uguali a 1, e i termini sopra i pivots tutti uguali a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Il sistema corrispondente è

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 2x_3 = 9 \\ \qquad x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Ora, attribuendo alla variabile libera x_3 un valore arbitrario t, ricaviamo subito:

$$\begin{cases} x_1 &= 9 + 2t \\ x_2 &= 3 - t \\ x_3 &= t \end{cases}$$